

**REIBUNGSPROZESSE IN DÜNNEN
AKKRETIONSSCHEIBEN**

Michael Kaisig

Disbui. München
1988



**REIBUNGSPROZESSE IN DÜNNEN
AKKRETIONSSCHEIBEN**

Dissertation der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität München

Vorgelegt von
MICHAEL KAISIG
aus Herscheid

München, den 15. Dezember 1987

1. Gutachter: Professor Dr. R. Kippenhahn
 2. Gutachter: Professor Dr. R.-P. Kudritzki
- Tag der mündlichen Prüfung: 6. Juni 1988



drucken + binden
gmbh
Schellingstraße 23
8000 München 40
☎ 089 / 28 44 45

Inhalt

	Seite
0. Zusammenfassung	3
1. Einleitung	7
2. Die hydrodynamischen Gleichungen	10
2.1 Die hydrodynamischen Erhaltungssätze	10
2.2 Annahmen und resultierendes Gleichungssystem	12
3. Viskosität in dünnen Akkretionsscheiben	16
3.1 Magnetische Viskosität	17
3.2 Dissipation in Stoßfronten	19
3.3 Turbulente Viskosität	20
3.3.1 Bedeutung des α -Parameters	21
3.3.2 Hydrodynamische Instabilitäten	24
3.3.3 Berechnung der instabilen Eigenfunktionen und Eigenwerte in einer Kepler-Scheibe	28
3.4 Zusammenfassung der Problematik bzgl. der Viskosität bei Akkretionsscheiben und Ziel der Arbeit	39
4. Die numerische Behandlung der nicht-linearen Simulationsrechnungen	42
4.1 Das numerische Rechenverfahren	42
4.1.1 Der Rechencode	42
4.1.2 Künstliche Kompressions- und Scherviskosität	52
4.1.3 Randbedingungen	54
4.2 Testrechnungen	62
4.2.1 Shock-Tube	62
4.2.2 Sedov-Lösung	68
4.2.3 Stabilität der ebenen Couette- und der ebenen Poiseuille Strömung	75

5.	Die Resultate der numerischen Simulationsrechnungen.....	85
5.1	Nicht-lineare Stabilitätsrechnungen	85
5.1.1	Instabile Eigenfunktion als Anfangsmodell	85
5.1.2	Zufällig verteilte Fluktuationen als turbulentes Anfangsmodell	100
5.2	Stoßdissipation in dünnen Akkretionsscheiben	115
6.	Schlußbemerkungen	126
7.	Literaturliste	129

Danksagung

Lebenslauf

0. Zusammenfassung

Eines der grundlegendsten Probleme in der Theorie der Akkretionsscheiben ist der Drehimpulstransport. Viskosität in der differentiell rotierenden Scheibe ist im Prinzip dazu in der Lage. Allerdings zeigt es sich, daß molekulare Viskosität um mehrere Größenordnungen zu klein ist, um überhaupt einen Akkretionsvorgang zu ermöglichen. Die Standardmodelle von dünnen Scheiben (α -Scheiben) parametrisieren die Dissipation durch einen viskosen Druck in der Form $t_{r\phi} = \alpha \cdot p$. Aus Beobachtungen von zeitlich periodischen Akkretionsvorgängen (Zwerg-Novae Ausbrüchen) leitet sich ein α -Wert im Bereich von $0.01 \leq \alpha \leq 1.0$ ab.

Diese Arbeit untersucht hydrodynamische Prozesse, die für die offensichtlich hohe Viskosität in dünnen Akkretionsscheiben vorgeschlagen wurden. Dabei handelt es sich zum einen um den erhöhten Energie- und Impulstransport durch Turbulenz und zum anderen um die erhöhte Dissipation in Stoßwellen innerhalb der Scheibe.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde zur Untersuchung der vorgeschlagenen Prozesse das nicht-lineare Verhalten von Fluktuationen in einem Ausschnitt einer mit Kepler-geschwindigkeit rotierenden, dünnen Akkretionsscheibe mit Hilfe von hydrodynamischen Simulationsrechnungen studiert. Als Grundlage diente ein zwei-dimensionaler Rechencode in kartesischen Koordinaten von räumlich zweiter und zeitlich semi-zweiter Ordnung.

Vom numerischen Standpunkt sind die folgenden Punkte hervorzuheben:

1. Die hydrodynamischen Prozesse wurden durch ein zwei-dimensionales Differenzschema in der r, ϕ -Ebene simuliert.
2. Im Gegensatz zu den meisten astrophysikalischen Praktiken, wurde die künstliche Viskosität, die normalerweise nur im Fall von Kompression wirksam wird, erweitert durch eine sog. künstliche Scherviskosität. Sie bewirkt einen Impulstransport entlang von Geschwindigkeitsgradienten in einer Scherströmung. Dies erwies sich zur Dämpfung kleinskaliger Fluktuationen als außerordentlich sinnvoll bei der Simulation von Turbulenz. Stabilitätsrechnungen bei der ebenen Poiseuille Strömung ließen deren Bedeutung erkennen. Nur mit dieser zusätzlichen Dissipation zeigten die numerischen Rechnungen ein Geschwindigkeitsfeld der turbulenten Fluktuationen, das in ausgezeichneter Weise mit den Beobachtungen übereinstimmt.

3. Für eine geeignete Behandlung der Ränder innerhalb einer Akkretionsscheibe wurden sog. transmittierende Randbedingungen in radialer Richtung benutzt. Zu diesem Zweck wurde das von Hedstrom(1979) vorgeschlagene Verfahren auf zwei-dimensionale Probleme erweitert. Bei dieser Methode werden an den transmittierenden Rändern die hydrodynamischen Gleichungen entlang der Charakteristiken gelöst mit der Bedingung, daß keine Information von außen in den Innenbereich des Gitters gelangen kann. Testrechnungen ergaben Transmissionsseigenschaften, die noch weit über den von Hedstrom erzielten Ergebnissen liegen.

Im ersten Teil der Untersuchungen zur Viskosität in dünnen Akkretionsscheiben wurden turbulente Modelle studiert. Notwendige Voraussetzung für Turbulenz ist eine Instabilität in der Keplerströmung. Die Ergebnisse der Untersuchungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. In einer Stabilitätsanalyse konnte gezeigt werden, daß die Keplerströmung linear instabil ist (siehe auch Narayan et al., 1987). Die Instabilitäten haben globalen Charakter und tauchen dann auf, wenn sich die korotierende Schicht innerhalb der Strömung befindet und wenn es eine Rückkopplung zu mindestens einem festen Rand gibt. Physikalisch lassen sich die Instabilitäten durch die sog. Over-Reflektion von Wellen an der korotierenden Schicht verstehen.
2. Die linearen Anwachsrate dieser instabilen Eigenmoden liegen in der Größenordnung von 10^{-2} bis 10^{-3} in Einheiten der Rotationsperiode.
3. Die linear instabilen Eigenfunktionen wurden als Anfangsmodell für die nicht-linearen Simulationen benutzt. Die numerischen Rechnungen konnten die linearen Anwachsrate bei (infinitesimal) kleinen Amplituden der anfänglichen Fluktuationen bis auf einen Faktor von 1.1 bis 1.7 wiedergeben.
4. Das System sättigt bei einer Machzahl M der Geschwindigkeitsfluktuationen von $M \sim 0.5$.
5. Da sich die Dissipationszeitskala in der gleichen Größenordnung bewegt wie die Anwachsrate der Instabilität, erscheint als wahrscheinlichster Sättigungsmechanismus die Dissipation in sehr schwachen Stoßfronten, auch wenn sich in den Dichtestrukturen keine deutlichen Hinweise von Stoßwellen zeigen.
6. Das System zeigt keinerlei Anzeichen von Entwicklung zur Turbulenz.

7. Aus den instabilen Modellen leitet sich über den radialen Impulstransport ein α -Parameter ab. Im gesättigten Zustand bewegt sich α im Bereich von

$$\alpha \sim (0.2 - 0.3) \cdot 10^{-3}.$$

Dies bedeutet aber keinesfalls, daß turbulente Modelle für die hohe Viskosität in Akkretionsscheiben vollkommen ausscheiden, da die in dieser Arbeit untersuchten instabilen Eigenmoden überhaupt kein turbulentes Geschwindigkeitsfeld entwickelt haben. Dafür kann es mehrere Gründe geben. Es könnte bedeuten, daß die durch Over-Reflektion an der kritischen Schicht induzierten Instabilitäten durch nicht-lineare Effekte sättigen und einen neuen, stabilen Zustand einnehmen. Eine weitere Möglichkeit könnten Unzulänglichkeiten in der "Input Physik" sein. Wesentlich erscheint bei diesem Punkt die Einschränkung der numerischen Simulationen auf zweidimensionale Störungen und die Vernachlässigung von Strahlungsverlusten. Beide Effekte sollten bei zukünftigen Untersuchungen unbedingt Beachtung finden.

Der zweite Teil dieser Arbeit befaßt sich mit der Bildung von Stoßwellen in Akkretionsscheiben und deren Bedeutung für die Viskosität. Es ist allgemein bekannt, daß nicht-axialsymmetrische Störungen spiralförmige Stoßwellen in differentiell rotierenden Scheiben bilden können. Ursache solcher Störungen mögen externe Gründe sein wie etwa Gezeitenkräfte des Begleitsterns oder das Auftreffen des Akkretionsstroms am äußeren Rand der Scheibe, aber auch interne Gründe, z.B. ein asymmetrisches Gravitationspotential des kompaktes Objekts oder eine asymmetrische Magnetosphäre eines Neutronensterns.

Zur Untersuchung solcher Phänomene wurde in nicht-linearen Simulationsrechnungen die Ausbreitung von Störungen innerhalb einer dünnen Akkretionsscheibe untersucht. Während alle bisherigen Studien die Bildung von Stoßwellen in einer differentiell rotierenden Scheibe unter einem globalen Blickwinkel betrachten, wurde in dieser Arbeit das Verhalten unter einem mehr lokalen Aspekt untersucht. Eine wesentliche Rolle spielt bei diesen Modellen der Korotationspunkt, an dem die Störung die gleiche Umdrehungsrate besitzt wie die Keplerströmung. Wegen der Erhaltung der Drehimpulsdichte muß die Energie von Wellen bei Annäherung an die korotierende Schicht abnehmen und bei Entfernen vom Korotationspunkt anwachsen. Dies ermöglicht bei überkritisch ($v > v_{Kep}$) rotierenden Störungen am Innenrand bzw. bei unterkritisch ($v < v_{Kep}$) rotierenden am Außenrand das Einsetzen nicht-linearer Effekte, ein Aufsteilen von Wellen und die Bildung von Stoßfronten. Im stationären

Zustand ergibt sich ein Gleichgewicht zwischen dem Anwachsen der Wellenenergie aufgrund der Erhaltung der Drehimpulsdichte und der Dissipation in Stoßfronten. Die Stärke der Stoßwellen in diesem Sättigungszustand erlaubt Rückschlüsse auf die resultierenden α -Werte derartiger Modelle.

Anfangsbedingung der numerischen Simulation war eine Dichtestörung am Innen- bzw. Außenrand des Gitters, die sich schneller oder langsamer als mit Kepler-geschwindigkeit an der jeweiligen radialen Position bewegt.

Die Ergebnisse der numerischen Simulationsrechnungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Nicht-axialsymmetrische Störungen erzeugen spiralförmige Wellen innerhalb der Scheibe.
2. Die Dichteprofile senkrecht zu den auslaufenden Wellen zeigen deutlich das Aufsteilen zu Stoßfronten.
3. Die radiale Abhängigkeit der Wellenamplituden wird bestimmt durch die Position des Korotationspunktes und durch die Dissipation. Entfernen sich die Wellen von der korotierenden Schicht, so wachsen ihre Amplituden wegen der Erhaltung der Drehimpulsdichte in radialer Richtung an. Eine Sättigung wird durch Dissipation in den Stoßfronten erzielt.
4. Ein α -Wert läßt sich aus diesen Rechnungen über den radialen Impulstransport bzw. über den Reynolds-Spannungstensor bestimmen. Die gerechneten Modelle liefern ein maximales α von

$$\alpha = 4.2 \cdot 10^{-2}.$$

Sie kommen damit in den Bereich der von den Beobachtungen abgeleiteten α -Werte.

In Zusammenfassung läßt sich sagen, daß das Problem der Reibungsprozesse in dünnen Akkretionsscheiben durch die in dieser Arbeit untersuchten hydrodynamischen Modelle nicht als vollständig gelöst betrachtet werden kann. Die numerisch simulierten instabilen Modelle können mit den gemachten Einschränkungen und Vereinfachungen die Viskosität noch nicht erklären. Dissipation in Stoßwellen liefert Reibung, die in den Bereich der beobachteten α -Werte kommt. Das läßt vermuten, daß Stoßdissipation zwar nicht allein den Akkretionsvorgang treiben kann, aber sicherlich eine bedeutende Rolle bei Reibungsprozessen in Akkretionsscheiben spielt.

1. Einleitung

Akkretionsscheiben spielen eine bedeutende Rolle in einer Vielzahl von astrophysikalischen Objekten. So betrachtet man Akkretion als die hauptsächliche Energiequelle der meisten leuchtkräftigsten Objekte im Universum (O-Sterne bilden vermutlich die einzige Ausnahme), für die die nukleare Energieerzeugung der Sterne völlig unzureichend ist. Der wesentliche Mechanismus ist die Freisetzung gravitativer Energie durch Materie, die innerhalb einer Scheibe durch ein sehr kompaktes Zentralobjekt akkretiert wird.

Ein bedeutender Teil des Akkretionsprozesses ist die Dissipation, die die orbitale kinetische Energie in Wärme und damit in Strahlung umwandelt, die einen Materiefluß nach innen erlaubt und die Drehimpuls nach außen transportiert. Die größte Unsicherheit in der Theorie der Akkretionsscheiben liegt in der Beschreibung dieser Dissipationsprozesse. Im Prinzip kann Viskosität in der differentiell rotierenden Keplerscheibe Akkretion verursachen. Allerdings ist die molekulare Viskosität um mehrere Größenordnungen zu klein. Für typische Parameter in dünnen Akkretionsscheiben liegt die Reynoldszahl R_e in der Größenordnung von

$$R_e \propto 10^{14}.$$

Das bedeutet, daß die viskosen Prozesse völlig unbedeutend für die Dynamik der Scheibe sind. Damit kann man weder verstehen, daß der Akkretionsvorgang so effizient sein soll, wie es die beobachteten Energien dieser Objekte nahelegen, noch die Entstehung dünner Akkretionsscheiben bei den typisch zu erwartenden Massentransferraten, noch die Zeitskalen bei den periodisch veränderlichen Akkretionsvorgängen, die von Zwerg-Novae Ausbrüchen sehr genau bekannt sind.

Eine ähnliche Problematik ist mit der Entstehung von Sternen verknüpft. Betrachtet man den Kollaps einer rotierenden, gravitativ instabilen Gaswolke, so wird sich nicht ein einziger Stern innerhalb des Alters unseres Universums bilden können, wenn man für den Drehimpulstransport nur molekulare Viskosität heranzieht (Morfill et al. 1985).

Auch bei der Sonne stellt sich ein vergleichbares Problem bzgl. des Drehimpulstransports. Man weiß, daß die Sonne über den Sonnenwind ständig Drehimpuls verliert. Die aus der Beobachtung von solaren akustischen Wellen abgeleitete innere Rotationskurve (Duvall und Harvey(1984), Duvall et al. (1984) läßt sich nur

verstehen, wenn es einen verstärkten Drehimpuls-Transportmechanismus im inneren, radiativen Teil der Sonne gibt (Spruit 1984).

In der Theorie der Akkretionsscheiben wird aus diesem Grunde die Viskosität künstlich erhöht durch die Einführung eines dimensionslosen Parameters (α -Parameter). Die Standardmodelle solcher Akkretionsscheiben, die auch als α -Scheiben bezeichnet werden, wurden von Shakura und Sunyaev(1973) vorgeschlagen und daraufhin unter den verschiedensten Gesichtspunkten weiterentwickelt. Siehe dazu Pringle und Rees(1972), Novicov und Thorne(1973), Lynden-Bell und Pringle(1974), Urpin(1983) und die Reviewartikel von Lightman et al.(1978), Pringle(1981), Verbunt(1982), Petterson(1983), Boyle(1984) und Hoshi(1985) bzw. die Bücher von Frank, King und Raine(1985) und von Shapiro und Teukolsky(1983).

Mehrere Prozesse sind für die hohe Viskosität in Akkretionsscheiben vorgeschlagen worden: magnetische Viskosität, Dissipation in Stoßfronten und Turbulenz. In dieser Arbeit werden nur rein hydrodynamische Effekte behandelt; der Einfluß von Magnetfeldern hingegen wird völlig außer Betracht gelassen.

Ein Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Bildung und Ausbreitung von Stoßwellen in Akkretionsscheiben und deren Bedeutung für die Dissipation. Stoßwellen in Akkretionsscheiben sind erstmals von Shu(1976) bei engen Doppelsternsystemen erwähnt worden. Sie werden am äußeren Rand der Scheibe durch den einfallenden Materiestrom ausgelöst und bilden wegen der differentiell rotierenden Keplerströmung spiralförmige Strukturen innerhalb der Scheibe. Im Prinzip kann jede nicht-axialsymmetrische Störung solche Effekte hervorrufen. Weber(1979) erweitert die Überlegungen von Shu(1976) und studiert zusätzlich den Einfluß der Gezeitenkräfte des Begleitsterns auf die Akkretionsscheibe. Beide Mechanismen können allerdings, zumindest nach den Resultaten seiner linearen Störungstheorie, nicht die beobachteten Akkretionsraten erklären. Michel(1984) diskutiert Stoßwellen in Akkretionsscheiben in Zusammenhang einer asymmetrischen Magnetosphäre um einen Neutronenstern. Sawada et al.(1986a,1986b,1987) zeigen in numerischen Simulationsrechnungen die Entstehung von Stoßfronten in Akkretionsscheiben und deuteten auf ihre eventuelle Bedeutung beim Drehimpulstransport hin. Spruit(1986) konnte nachweisen, daß die hydrodynamischen Gleichungen für dünne Scheiben Ähnlichkeitslösungen für spiralförmige Stoßwellen besitzen.

Ein Ziel der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten nicht-linearen Simulationsrechnungen war das Studium der Entwicklung und Ausbreitung von Stoßwellen in Keplerscheiben und deren Einfluß auf den Drehimpulstransport.

Der zweite Teil behandelt das Verhalten turbulenter Fluktuationen in der differentiell rotierenden Akkretionsscheibe. Das Hauptproblem besteht darin, daß die Keplerströmung in dünnen Akkretionsscheiben eine extreme supersone Scherströmung darstellt, fast immer radiativ ist und eine sehr hohe Reynoldszahl in der Größenordnung von 10^{14} besitzt. Die hohe Scherrate und Reynoldszahl haben viele Autoren zu der Vermutung gebracht, daß die Strömung in Akkretionsscheiben instabil gegenüber turbulenten Fluktuationen ist. Von Laborexperimenten weiß man, daß jede Strömung oberhalb einer kritischen Reynoldszahl turbulent wird. In der Regel bewegt sich diese kritische Reynoldszahl in der Größenordnung von 10 bis 10^3 . Allerdings rechtfertigt die beobachtete Turbulenz bei Laborströmungen nicht die Annahme von Turbulenz in Akkretionsscheiben. Bisher gibt es weder von der Beobachtung noch von theoretischen Überlegungen und Untersuchungen eindeutige Anzeichen für Turbulenz in Keplerscheiben. Notwendige Voraussetzung für Turbulenz ist eine Instabilität in der Keplerströmung. Alle gängigen, linearen Stabilitätsuntersuchungen lassen allerdings keine Hinweise auf Instabilitäten erkennen. So ist z.B. eine zwischen zwei Zylindern rotierende Strömung (rotierende Couette-Strömung) linear stabil gegen axialsymmetrische Störungen, falls der spezifische Drehimpuls mit radialem Abstand zunimmt. Von ebenen Scherströmungen weiß man, daß hinreichend für Instabilität ein Inflexionspunkt im Geschwindigkeitsprofil ist (siehe Kapitel 3.3.2). Keines der beiden Kriterien deutet jedenfalls auf Instabilität von Keplerscheiben hin.

Der bisher einzige Hinweis auf Instabilität kommt von der Untersuchung der Moden, die durch die sog. "Over-Reflektion" an der kritischen Schicht verursacht werden (siehe 3.3.2). Deren Bedeutung wurde erstmals von Drury(1980, 1985) hervorgehoben. Goldreich und Narayan(1985) dehnen diese Überlegungen auf die Instabilität dünner Akkretionsscheiben aus. Narayan et al.(1987) erweitern die Analysen durch numerische Rechnungen und finden Anwachsrate der instabilen Moden in der Größenordnung von 10^{-3} in Einheiten der Rotationsperiode.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurde das nicht-lineare Zeitverhalten solcher instabilen Eigenmoden untersucht und deren Einfluß auf die effektive Viskosität in Akkretionsscheiben studiert.

Der Aufbau der Arbeit ist wie folgt: in Kapitel 2 werden die hydrodynamischen Grundgleichungen vorgestellt, die die Strömung in einer Keplerscheibe beschreiben. Kapitel 3 ist allgemeinen Bemerkungen zu Reibungsprozessen in Akkretionsscheiben gewidmet. Kapitel 4 beschreibt die numerische Behandlung der nicht-linearen Simulationsrechnungen, Kapitel 5 gibt eine Darstellung der numerischen Ergebnisse. Allgemeine Schlußbemerkungen folgen in Kapitel 6.



2. Die hydrodynamischen Grundgleichungen

Die Strömung in einer Akkretionsscheibe wird durch die hydrodynamischen Gleichungen eines viskosen Gases beschrieben (Landau und Lifshitz, 1959, oder speziell auf Akkretionsscheiben bezogen Verbunt, 1982, Lightman, 1974a,b und Frank, King und Raine, 1985). Diese Grundgleichungen beinhalten Erhaltungssätze, die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie. Der Zustand des Systems wird eindeutig bestimmt durch die Dichte ρ , Geschwindigkeit $\vec{v}$ und durch die spezifische Energie e .

In Kapitel 2.1 werden die hydrodynamischen Erhaltungssätze vorgestellt. Zusammen mit einer Zustandsgleichung, einer Gleichung für den Strahlungstransport und für die Viskosität bilden sie ein vollständiges System zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung eines hydrodynamischen Zustands. In der Praxis darf man allerdings nicht hoffen, die Gleichungen in dieser Allgemeinheit lösen zu können. Aus diesem Grunde werden in Kapitel 2.2 die vereinfachenden Annahmen diskutiert, die bei den numerischen Simulationsrechnungen im Rahmen dieser Arbeit benutzt wurden.

2.1 Die hydrodynamischen Erhaltungssätze

Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

beschreibt die Erhaltung von Masse und besagt, daß sich die Masse in einem gegebenen Volumenelement nur über einen Massenfluß durch die Oberfläche des Volumens ändern kann.

Die Impulserhaltung ist durch die Navier-Stokes Gleichung gegeben:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \vec{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} \cdot \vec{v}) = -\text{grad}(p) - \rho \cdot \text{grad}(\phi) - \text{div}(\underline{t}). \quad (2.2)$$

Der Term $\text{div}(\rho \vec{v} \cdot \vec{v})$ beschreibt die Advektion von Impuls durch das Geschwindigkeitsfeld. Weiterhin ändert sich der Impuls durch Druckgradienten p , durch ein Gravitationsfeld ϕ und durch viskose Kräfte $\underline{t}$. Hierbei ist $\underline{t}$ der sog. viskose Spannungstensor, der den Impulstransport entlang von Geschwindigkeitsgradienten durch

thermische und turbulente Bewegungen beschreibt. Betrachtet man die Strömung in einem mitrotierenden System, so müssen zusätzlich Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte berücksichtigt werden.

Die Energiegleichung

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \cdot \vec{v}) = -p \cdot \operatorname{div}(\vec{v}) - (\underline{t} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \operatorname{div}(q) \quad (2.3)$$

beschreibt die Änderung der internen Energiedichte durch die vom Geschwindigkeitsfeld hervorgerufene Advektion, durch die vom Druck p geleistete Arbeit, durch die von den viskosen Kräften $\underline{t}$ erzeugte Wärme und durch Strahlungsverluste q .

Diese Erhaltungssätze sind allerdings unzureichend für die Bestimmung des hydrodynamischen Zustands. Zusätzlich sind erforderlich eine Zustandsgleichung, eine Gleichung für den Strahlungstransport und eine Gleichung für den viskosen Spannungstensor.

Die Zustandsgleichung

$$p = \frac{1}{3} a T^4 + (\gamma - 1) \cdot \rho e \quad (2.4)$$

verknüpft den Druck p mit der Temperatur T und der inneren Energiedichte und besteht i.a. aus Beiträgen vom Strahlungsdruck und Gasdruck, hier dem idealen Gasdruck.

Die Gleichung für den Strahlungstransport kann durch die Annahme approximiert werden, daß jedes Oberflächenelement der Scheibe wie ein Schwarzkörper strahlt. In diesem Fall der optisch dicken Scheibe können die Strahlungsverluste durch die Planck-Funktion beschrieben werden.

Für den viskosen Spannungstensor $\underline{t}$ ist keine natürliche Annahme möglich. Man weiß nur, daß die Reibung in den Scheiben um mehrere Größenordnungen höher sein muß als die molekulare Viskosität. Aufgrund dieser Unkenntnis ist man zu einer ad hoc Annahme gezwungen. Im Falle von Akkretionscheiben argumentiert man folgendermaßen: falls mehr Materie auf die Scheibe trifft als durch sie hindurch transportiert werden kann, so erhöht sich am äußeren Rand die Dichte und damit auch der Druck. Die Elemente des viskosen Spannungstensors haben die Dimension eines Drucks, und nur wenn die Viskosität mit wachsendem Druck ansteigt kann sich ein Gleichgewicht einstellen, bei dem die gesamte einfallende Materie durch die Scheibe

transportiert werden kann. Shakura und Sunyaev(1973) haben deshalb vorgeschlagen, daß die Komponente $t_{r\phi}$ des viskosen Spannungstensors, die den Akkretionsvorgang bestimmt, proportional zum Druck ist:

$$t_{r\phi} = \alpha \cdot p. \quad (2.5)$$

Der dimensionslose Parameter α beschreibt die Effizienz der viskosen Prozesse. Damit ist die gesamte physikalische Unkenntnis der Reibungsprozesse in die Interpretation eines Parameters verlagert worden. Eine physikalische Deutung der erhöhten Viskosität und physikalische Modellvorstellungen für α -Scheiben schließen sich in Kapitel 3 an.

2.2 Annahmen und resultierendes Gleichungssystem

Das System der hydrodynamischen Grundgleichungen, ergänzt durch eine Zustandsgleichung, eine Gleichung für den Strahlungstransport und eine Gleichung für den viskosen Spannungstensor beschreibt zumindest im Prinzip bei geeigneten Randbedingungen das Verhalten von Störungen innerhalb einer Akkretionsscheibe. In der Praxis allerdings darf man nicht erwarten, die Gleichungen in der Allgemeinheit lösen zu können, in der sie hier vorgestellt wurden. Für die numerische Simulation von Fluktuationen in einer dünnen Keplerscheibe wurden aus diesem Grunde die folgenden Annahmen und Vereinfachungen gemacht:

- Das Problem wird reduziert auf eine zwei-dimensionale Keplerströmung in der r, ϕ -Ebene.
- Die physikalische Viskosität wird vernachlässigt, d.h.

$$\underline{t} = 0,$$

da man weiß, daß die Reynoldszahl in der Größenordnung von 10^{14} liegt.

- Energieverluste durch Abstrahlung werden vernachlässigt, d.h.

$$q = 0.$$

- Die Zustandsgleichung beinhaltet keine Beiträge vom Strahlungsfeld und ist durch das ideale Gasgesetz gegeben

$$p = (\gamma - 1) \cdot \rho e. \quad (2.6)$$

- Die Gleichungen werden in einem mitrotierenden Koordinatensystem behandelt; damit müssen zusätzlich Zentrifugal- und Corioliskräfte mit berücksichtigt werden.
- Nur ein kleiner Ausschnitt aus der Scheibe in der Größenordnung der Scheibendicke h_0 wird numerisch simuliert, da man Fluktuationen mit einer charakteristischen Längenskala von dieser Größenordnung erwartet (siehe dazu Kapitel 3.3). In der Approximation der dünnen Akkretionsscheibe

$$\frac{h_0}{r} \ll 1, \text{ normalerweise, } \frac{1}{100} < \frac{h_0}{r} < \frac{1}{30} \quad (2.7)$$

erlaubt dies den Übergang zu kartesischen Koordinaten.

Mit diesen Annahmen und Vereinfachungen läßt sich das System der hydrodynamischen Gleichungen erheblich vereinfachen. In einem mit Ω_0 mitrotierenden System lauten die Bewegungsgleichungen (2.2) für die azimuthale Geschwindigkeit v und für die radiale Geschwindigkeit u in Zylinderkoordinaten (vgl. auch Pedlosky, 1979, Gl. 1.6.7):

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u \cdot v}{r} \right] = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2\rho u \cdot \Omega_0, \quad (2.8)$$

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \cdot g_r + \rho \cdot \Omega_0^2 r + 2\rho v \cdot \Omega_0. \quad (2.9)$$

In Gleichung (2.9) beschreibt g_r das Gravitationsfeld. Entwicklung um einen Punkt r_0 innerhalb der Scheibe bis zur zweiten Ordnung gemäß

$$r = r_0 + x = r_0 \cdot \left(1 + \frac{x}{r_0} \right)$$

ergibt:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{r_0} + \left(\frac{x}{r_0} \right)^2 \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u \cdot v}{r_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{r_0} + \left(\frac{x}{r_0} \right)^2 \right) \right] \\ = -\frac{1}{r_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{r_0} + \left(\frac{x}{r_0} \right)^2 \right) \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2\rho u \cdot \Omega_0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

und

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{r_0} + \left(\frac{x}{r_0} \right)^2 \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{r_0} + \left(\frac{x}{r_0} \right)^2 \right) \right] \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} - \rho \Omega_0^2 r_0 \cdot \left(1 - 2 \frac{x}{r_0} + 3 \left(\frac{x}{r_0} \right)^2 \right) + \rho \Omega_0^2 r_0 \cdot \left(1 + \frac{x}{r_0} \right) + 2 \rho v \cdot \Omega_0. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Skaliert man diese Gleichungen mit einer charakteristischen Länge h_0 (entsprechend der Scheibendicke) und einer Zeitskala τ , die mit der isothermen Schallgeschwindigkeit c_s durch ($c_s = \frac{h_0}{\tau}$) verknüpft ist, in der folgenden Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} & u &= \frac{h_0}{\tau} \cdot \tilde{u} & v &= \frac{h_0}{\tau} \cdot \tilde{v} \\ \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{1}{h_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{r_0}{h_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} & p &= \rho_0 \cdot \frac{h_0^2}{\tau^2} \cdot \tilde{p}, \end{aligned}$$

und vernachlässigt man alle Terme der Größenordnung $\frac{h_0}{r_0}$ und kleiner, so erhält man:

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Ro} \cdot 2 \rho u \quad (2.12)$$

und

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Ro} \cdot (3 \rho x + 2 \rho v). \quad (2.13)$$

In den beiden letzten Gleichungen (2.12 und 2.13) wurde das Tildezeichen fallengelassen. Alle auftretenden Größen sind entsprechend der Skalierung dimensionslos. Ro bezeichnet man als Rossby-Zahl und beschreibt das Verhältnis der Rotationsperiode Ω_0^{-1} zur Zeitskala τ . Diese dimensionslose Zahl taucht auf, da die Scheibendicke als typische Längenskala, die Rotationsperiode als typische Zeitskala und die isotherme Schallgeschwindigkeit als charakteristische Geschwindigkeit gewählt wurden. In dünnen Akkretionsscheiben ändert sich die Keplergeschwindigkeit um die Größenordnung der Schallgeschwindigkeit sobald sich der radiale Abstand um den Betrag der Scheibendicke variiert. Daraus folgt, daß in Keplerscheiben die Rossby-Zahl etwa 1 sein muß. Dennoch wurde Ro als Parameter beibehalten, da das Gleichungssystem (2.12 und 2.13) unter Hinzunahme der Kontinuitätsgleichung (2.1) und der Energiegleichung (2.3) mit $Ro \rightarrow \infty$ gleichzeitig das Zeitverhalten von ebenen Scherströmungen beschreibt. Dies ist insofern von Vorteil, als zu Testzwecken die Stabilität der ebenen Couette und der ebenen Poiseuille Strömung untersucht wurde (siehe Kapitel 4.2.3).

Geht man mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung zu Impulsdichten über, so ergibt sich das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \cdot \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Ro} \cdot (2\rho v + 3\rho x), \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \cdot \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Ro} \cdot 2\rho u, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \text{div}(\rho e \cdot \vec{v}) = -p \cdot \text{div}(\vec{v}), \quad (2.17)$$

$$p = (\gamma - 1) \cdot \rho e. \quad (2.18)$$

Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ ist gegeben durch die Komponente u_t , die die Fluktuationen in radialer Richtung beschreibt, und durch die azimutale Komponente v , die aus der Keplerströmung und einem fluktuierenden Anteil v_t besteht. In dem gewählten mitrotierenden Koordinatensystem wird die Keplergeschwindigkeit durch eine lineare Abhängigkeit vom Radius mit einer Scherrate von -1.5 beschrieben:

$$(\vec{v}) = (u_t, v) = (u_t, -1.5 \cdot x + v_t). \quad (2.19)$$

Dieses System von nicht-linearen Gleichungen wurde numerisch gelöst. Bei geeigneten Anfangs- und Randbedingungen lassen sich damit die Auswirkungen von Störungen in einer dünnen Akkretionsscheibe zeitlich simulieren.

3. Die Viskosität in dünnen Akkretionsscheiben

Molekulare Viskosität ist um mehrere Größenordnungen zu klein, um einen Akkretionsprozeß zu ermöglichen. Aus diesem Grunde wird die Reibung künstlich durch die Einführung des sog. α -Parameters erhöht.

Anzeichen für die Größenordnung der Viskosität bzw. des α -Parameters kommen im wesentlichen von Beobachtungen zeitlich veränderlicher Vorgänge. Der Strahlungsfluß, die Gesamt-Leuchtkraft und im optisch dicken Fall das emittierte Strahlungsspektrum einer stationären Akkretionsscheibe sind weitestgehend unabhängig von der Viskosität. Dies wiederum ist eine Folge der Stationarität. Im stationären Fall muß die Scheibe die gesamte einfallende Materie akkretieren und die Dissipation kann nur von der Massentransferrate abhängen. Details der Scheibenstruktur, die Oberflächendichte, die optische Dicke etc. sowie die Zeitskala, mit der sich die Scheibe entwickelt (viskose Zeitskala) werden hingegen hauptsächlich vom α -Parameter bestimmt.

Die meisten Hinweise kommen aus der Beobachtung von Zwerg-Novae Ausbrüchen. Von der theoretischen Seite her existieren zwei Modelle für die Erklärung der periodischen Ausbrüche. In dem ersten Modell ist die Massentransferrate vom Begleitstern variabel aufgrund von dynamischen Instabilitäten in der Hülle. Das bedeutet, daß ein Ausbruch einem plötzlichen Anstieg im Massenfluß entspricht. Numerische Simulationen von Bath und Pringle(1981), Lin et al.(1985) und Pringle et al.(1986) zeigen, daß die beobachteten Lichtkurven nur bei einem α -Wert im Bereich zwischen 0.01 und 1.0 reproduziert werden können. In dem zweiten Modell nimmt man an, daß die Viskosität innerhalb der Scheibe variiert. Zwischen den Ausbrüchen ist die Viskosität gering, d.h. die viskose Zeitskala ist sehr lang, und die Materie sammelt sich in der Scheibe an. Während des Ausbruchs steigt die Viskosität plötzlich an, d.h. die viskose Zeitskala wird sehr klein und die vorher angesammelte Materie wird sehr schnell zum Zentralobjekt transportiert. Numerische Rechnungen von Meyer und Meyer-Hofmeister(1984) deuten ebenfalls auf α -Werte in der Größenordnung von 0.01 bis 1.0 hin. Ähnliche Rechnungen bei Symbiotischen Sternen bestätigen diese Ergebnisse (Duschl, 1985).

Eine Reihe von physikalischen Prozessen sind für die hohe Viskosität in Akkretionsscheiben vorgeschlagen worden. Im wesentlichen kann man unterscheiden zwischen magnetischen Modellen und rein hydrodynamischen Theorien, die die Reibungsprozesse durch Dissipation in Stoßfronten oder durch eine turbulente Viskosität

erklären. Im folgenden wird kurz auf die wesentlichen Grundgedanken dieser Prozesse eingegangen.

3.1 Magnetische Viskosität

Die akkretierte Materie besitzt i.a. ein Magnetfeld $\vec{B} = (B_r, B_\varphi, B_z)$. Aufgrund der differentiellen Rotation wird die Feldkomponente in Strömungsrichtung B_φ ständig auf dynamischer Zeitskala verstärkt. Sobald der magnetische Druck p_{mag} gleich dem thermischen Gasdruck p ist muß sich entweder das Strömungsfeld und/oder die Magnetfeldstruktur ändern. Man erwartet, daß sich aufgrund von Instabilitäten die Magnetfeldlinien aus der Scheibe herausbewegen und eine völlig irreguläre Zellstruktur bilden. Vermutlich ist ein weiteres Anwachsen des Magnetfelds durch das Einsetzen von Rekonnexion außerhalb der Scheibe nicht mehr möglich. Daher erwartet man einen Gleichgewichtszustand zwischen dem Anwachsen des Magnetfelds durch die Keplerbewegung und der Dissipation durch Rekonnexions-Prozesse. In diesem Modell läßt sich der viskose Spannungstensor abschätzen zu:

$$t_{r\varphi} \propto \frac{B_r \cdot B_\varphi}{8\pi} \leq \frac{B^2}{8\pi}.$$

Damit erhält man einen Zusammenhang zum Gasdruck p

$$t_{r\varphi} \propto \frac{B^2}{8\pi \cdot p} \cdot p = \alpha \cdot p,$$

in dem der α -Parameter gegeben ist durch

$$\alpha = \frac{p_{mag}}{p}.$$

Das zeigt, daß derartige magnetische Modelle genau den Zusammenhang zwischen dem viskosen Spannungstensor und dem Druck liefern können, der in der α -Beschreibung von Shakura und Sunyaev(1973) benutzt wurde. Voraussetzung ist, daß das Modell auch einen Grund für $\frac{p_{mag}}{p} = constant$ liefern kann. Der α -Parameter bedeutet in diesen Modellen das Verhältnis von magnetischem Druck zu thermischem Druck. Aufgrund der o.a. Überlegungen vermutet man $\alpha \leq 1$, aber das hängt u.a. davon ab, wie effektiv das Magnetfeld durch Rekonnexion-Prozesse begrenzt werden kann, bzw. inwieweit Rekonnexion mit der Feldverstärkung durch die differentielle Rotation Schritt halten kann (siehe dazu Galeev et al., 1979).

Eardley und Lightman(1975) betrachten Modelle mit magnetischer Viskosität, die durch Scherverstärkung und Rekonnexion von chaotisch verteilten Magnetfeldern verursacht wird. Bei einer Rekonnexionsrate einer magnetischen Zelle von eins pro Umlaufperiode erhalten sie ein Viskositätsgesetz, das äquivalent zu einem Wert des α -Parameters von Shakura und Sunyaev(1975) im Bereich von 0.01 bis 1.0 ist. Coroniti(1981) greift die Annahme auf, daß hydrodynamische Turbulenz magnetische Zellen formt und betrachtet die Dynamik dieser Zellstruktur unter Berücksichtigung der Verschering, Rekonnexion und Verschmelzung in der differentiell rotierenden Scheibe. Die Viskosität kann aus der radialen Verschiebung der Zellen abgeschätzt werden und ergibt α -Werte von 0.1 bis 0.3 (siehe auch Sakimoto und Coroniti, 1981).

Turbulente Dynamo-Modelle, bei denen sich großräumige Magnetfelder aus kleinskaligen, turbulenten Bewegungen entwickeln, erscheinen als mögliche Prozesse für den Drehimpulstransport in Akkretionsscheiben (Meyer und Meyer-Hofmeister, 1982, 1983). Allerdings ist es ein sehr schwieriges Problem die Magnetfeldstruktur zu bestimmen. Differentielle Rotation wickelt die Magnetfeldlinien auf und führt zu einem instationären Anwachsen des Magnetfelds. Turbulenz und Instabilitäten modifizieren drastisch diese Situation (Stella und Rosner, 1984). Zuerst wächst toroidales Feld aus poloidalem durch differentielle Rotation. Wenn ein konvektives Element durch Auftriebskräfte aufwärts steigt, dehnt es sich aufgrund des horizontalen Druckgleichgewichts aus. Corioliskräfte bewirken ein Anwachsen des poloidalen Feldes (Takahara, 1979). Viele turbulente Zelle wechselwirken miteinander um poloidales Feld aus toroidalem zu erzeugen. Dieser Mechanismus wird als α -Effekt bezeichnet, und wenn er mit dem Aufwickeln der Magnetfeldlinien durch die differentielle Rotation gekoppelt ist, liefert dies einen $\alpha\omega$ -Dynamo.

Turbulente Dynamoprozesse wurden von Ichimaru(1977) untersucht. Die Resultate für die turbulente Viskosität können in Anlehnung an die Mischungswegtheorie interpretiert werden und liefern turbulente Längenskalen vergleichbar mit der Scheibendicke h_0 . Pudritz(1981a,b) zeigt, daß der Maxwell-Stresstensor dieser Modelle über alle anderen Spannungstensoren für den Drehimpulstransport dominieren kann. Berechnungen der Scheibenstruktur und grundlegende Resultate werden bei Pudritz und Fahlman(1982) und Pudritz(1983) diskutiert. Kato(1984) und Kato und Horiuchi(1985,1986) bestimmen die Stärke der turbulenten Magnetfelder aus einem Gleichgewicht zwischen der Erzeugung durch die differentielle Rotation, der Energiekaskade des turbulenten Magnetfeldes durch Diffusion und dem Verschwinden des Feldes aus

der Scheibe durch magnetischen Auftrieb. Sie benutzen die Struktur des turbulenten, magnetischen Spektrums um den α -Wert abzuschätzen.

Ein völlig anderer und weitaus radikalerer Ansatz, Magnetfelder für den Drehimpulstransport in Akkretionsscheiben heranzuziehen, wurde von Blandford(1976), Lovelace(1976) und Blandford und Znajek(1977) gemacht. Wenn die akkretierte Materie ein Magnetfeld besitzt mit einer Komponente parallel zur Rotationsachse, so kann sich ober- und unterhalb der Scheibe eine Magnetosphäre bilden, ähnlich wie bei den Pulsar-Modellen von Goldreich und Julian(1969). Energie und Drehimpuls werden bei diesen Modellen über einen relativistischen magnetischen Wind senkrecht zur Scheibe wegtransportiert (siehe dazu den Reviewartikel von Coroniti, 1985).

3.2 Dissipation in Stoßfronten

In dünnen Akkretionsscheiben ist die relative Strömungsgeschwindigkeit zwischen Keplerbahnen, die weiter als eine Scheibendicke voneinander entfernt sind, superson. Das könnte ein Hinweis darauf sein, daß sich Stoßwellen bilden. Die Dissipation in diesen Stoßfronten könnte einen erheblichen Beitrag zur Viskosität liefern.

Quelle der Stoßfronten könnten externe Gründe sein, wie die gravitative Wechselwirkung mit dem Begleitstern (Weber,1979), oder die Anregung durch den überfließenden Massenstrom am äusseren Rand der Scheibe (Shu,1976 und Weber,1979) oder aber auch Störungen innerhalb der Scheibe, die durch eine asymmetrische Magnetosphäre hervorgerufen werden (Michel, 1984). Weitere Ursachen könnten Störungen am Innenrand der Scheibe sein, z.B. Dichteunebenheiten auf der Oberfläche eines Weißen Zwerges oder ein asymmetrisches Gravitationspotential des Zentralobjekts.

In einer zeitabhängigen zwei-dimensionalen Simulationsrechnung finden Sawada et al.(1986a, 1986b, 1987) die Bildung von zwei oder mehreren spiralförmigen Stoßwellen innerhalb der Akkretionsscheibe. Sie werden vermutlich angeregt am äußeren Rand der Scheibe durch Gezeitenkräfte und breiten sich innerhalb der Scheibe bis zur Oberfläche des Zentralobjekts aus. Gas, das auf die Stoßwellen trifft, wird abgebremst und die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Stoßfront wird subson. Damit wird der Geschwindigkeitsvektor zum kompakten Objekt hin abgelenkt. Die Materie verliert Drehimpuls und spiralliert auf das Zentralobjekt. Leider machen die Autoren keine Angaben über die Größenordnung der Viskosität.

Spruit(1987) zeigte, daß die Bewegungsgleichungen in einer Akkretionsscheibe eine stationäre Ähnlichkeitslösung für Stoßwellen besitzen. In Übereinstimmung mit den numerischen Simulationen von Sawada et al.(1986a, 1986b, 1987) haben sie die Form von Spiralen. Die Dissipation hängt im wesentlichen von der Stärke der Stoßwellen und damit von der Machzahl vor der Stoßfront ab. Die numerischen Rechnungen zeigen, daß die maximale derartig definierte Machzahl etwa 1.3 ist. In allen realistischen Fällen liegt damit der α -Parameter in der Größenordnung von 10^{-4} . Der Drehimpulstransport erfolgt bei diesen Modellen entweder über gravitative Wechselwirkung (vornehmlich in den äußeren Bereichen der Scheibe) oder über den Austausch von Drehimpuls zwischen den Stoßwellen und der Keplerströmung (Spruit et al., 1987).

Ein Teil dieser Arbeit befaßt sich mit der Ausbreitung und der zeitlichen Entwicklung von Störungen innerhalb der Scheibe und deren Auswirkung auf den radialen Impulstransport. Zentrale Fragen dieses Komplexes sind, ob derartige Störungen Stoßwellen bilden, wie weit sie sich innerhalb der Scheibe ausbreiten und inwiefern daraus ein Drehimpulstransport nach außen resultiert.

3.3 Turbulente Viskosität

Turbulente Strömungen haben die weitaus größere Fähigkeit Drehimpuls zu transportieren als laminare Strömungen. Die hohe Reynoldszahl in Akkretionsscheiben besagt, daß die Viskosität völlig bedeutungslos für die Dynamik der Scheibe ist. Andererseits gibt sie bereits Hinweise auf einen möglichen Reibungsprozeß .

Von Laborexperimenten weiß man, daß alle Strömungen oberhalb einer kritischen Reynoldszahl turbulent werden. Die kritische Reynoldszahl liegt i.a. in der Größenordnung von 10^4 bis 10^5 . Dies könnte bedeuten, daß sich bei den hohen Reynoldszahlen auch in Akkretionsscheiben Turbulenz entwickelt. Bisher gibt es allerdings keine eindeutigen Anzeichen dafür. Weder lassen Beobachtungen sichere Aussagen über turbulente Strömungen in Akkretionsscheiben zu, noch erhält man von theoretischen Stabilitätsanalysen konkrete Hinweise.

Macht man die Annahme von Turbulenz, so läßt sich der viskose Spannungstensor in Einklang mit dem α -Modell von Shakura und Sunyaev(1973) formulieren. Physikalisch beschreibt der α - Parameter in diesen Modellen das Verhältnis von turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen zur Schallgeschwindigkeit. Dieser Sachverhalt wird in 3.3.1 verdeutlicht.

Notwendige Voraussetzung für Turbulenz in dünnen Akkretionsscheiben, allerdings nicht hinreichend, ist eine Instabilität in der Keplerströmung. Kapitel 3.3.2 ist allgemeinen Bemerkungen zu Stabilitätsanalysen von rotierenden und ebenen Scherströmungen gewidmet.

Der bisher einzige Hinweis auf lineare Instabilität kommt aus den Untersuchungen solcher Moden, die aus der sog. Over-Reflektion von Wellen an der korotierenden Schicht entstehen. In Kapitel 3.3.3 werden diese instabilen Eigenfunktionen und linearen Anwachsrate berechnet. Sie dienen später als Anfangswerte für die nicht-linearen Simulationsrechnungen.

3.3.1 Die Bedeutung des α -Parameters

Nimmt man Turbulenz an, so läßt sich der viskose Spannungstensor (Landau und Lifshitz, 1959) schreiben als

$$t_{r\varphi} = \eta_t \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{r} - \frac{v_\varphi}{r} \right).$$

Unter der Voraussetzung einer axialsymmetrischen, dünnen Scheibe, die mit Kepler-geschwindigkeit rotiert, kann man $t_{r\varphi}$ abschätzen zu:

$$t_{r\varphi} \propto \frac{3}{2} \cdot \eta_t \cdot \frac{v_\varphi}{r}. \tag{3.1}$$

Dabei bedeutet η_t die turbulente Viskosität. Sie ist im Grunde genommen keine Viskosität, sondern beschreibt vielmehr die erhöhte Reibung durch den turbulenten Transport von Energie und Impuls von großräumigen Strukturen in kleinräumige Elemente, wo Dissipation stattfindet.

Führt man eine charakteristische Längenskala l_t der turbulenten Zellen und eine charakteristische Geschwindigkeit v_t der turbulenten Fluktuationen ein und benutzt die Tatsache, daß die Keplerströmung v_φ in einer dünnen Akkretionsscheibe viel größer als die Schallgeschwindigkeit c_s ist, nämlich

$$\frac{v_\varphi}{c_s} \propto \frac{r}{h_0}, \tag{3.2}$$

so ergibt sich aus Gl.(3.1):

$$t_{r\varphi} \propto \rho \cdot l_t v_t \cdot \frac{v_\varphi}{r} \propto \rho \cdot c_s^2 \cdot \frac{v_t}{c_s} \cdot \frac{l_t}{h_0} = \alpha \cdot p$$

mit

$$\alpha = \frac{v_t}{c_s} \cdot \frac{l_t}{h_0}. \quad (3.3)$$

Die Effizienz der viskosen Prozesse kann damit wiederum durch den α -Parameter charakterisiert werden. Im Falle dieser turbulenten Modelle bedeutet er im wesentlichen das Verhältnis von turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen zur Schallgeschwindigkeit.

Aus den folgenden Überlegungen erwartet man, daß sich α in der Größenordnung von 1 bewegt. In einer dünnen Akkretionsscheibe ist die dynamische Zeitskala durch die Keplerperiode gegeben. Innerhalb einer Umdrehung kann sich eine Störung in radialer Richtung mit Schallgeschwindigkeit über eine Länge in der Größenordnung der Scheibendicke h_0 ausbreiten (vgl. Gl.3.2). Das bedeutet, daß innerhalb dieses charakteristischen Zeitraums Ω_0^{-1} ein kausaler Zusammenhang nur maximal über die Entfernung h_0 besteht. Bei größeren Strukturen wäre der relative Geschwindigkeitsunterschied in radialer Richtung größer als Schallgeschwindigkeit. Damit kann Information niemals innerhalb der Struktur ausgetauscht werden. Das bedeutet, daß größere Strukturen als h_0 nicht kausal zusammenhängend sein können. Von daher erwartet man, daß die maximale turbulente Längenskala in der Größenordnung der Scheibendicke h_0 sein wird.

Bezüglich der turbulenten Geschwindigkeiten lassen sich nur Vermutungen anstellen. De Freitas Pacheco und Steiner(1976) leiten aus der theoretischen Berechnung von Spektren Überschallturbulenz in den äußeren Bereichen der Scheibe ab. Allerdings geben sie keine physikalische Ursachen für deren Entstehung. Es erscheint überaus fraglich, ob z.B. der überfließende Materiestrom Überschallturbulenz aufrecht erhalten kann, und ob sie sich auch in die inneren Bereiche der Scheibe ausdehnen kann. Man würde deshalb vermuten, daß turbulente Überschallgeschwindigkeiten in Stoßfronten dissipiert werden und $\alpha = 1$ daher eine obere Grenze für den Viskositätsparameter darstellt.

Damit ist gezeigt, daß turbulente Modelle zumindest rein theoretisch die hohen Viskositäten in Akkretionsscheiben erklären können und α -Werte liefern, die in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung stehen. Allerdings muß man berücksichtigen,

daß es bisher trotz zahlreicher Bemühungen (siehe z.B. Stewart, 1975,1976) keine Hinweise auf Turbulenz in Akkretionsscheiben gibt. Voraussetzung für die Entwicklung von Turbulenz ist eine Instabilität in der Keplerströmung. Genauere Einzelheiten folgen in Kapitel 3.3.2.

Paczyński(1978) betrachtet Scheibenmodelle, bei denen Turbulenz durch Instabilitäten getrieben wird, die durch Eigengravitation hervorgerufen werden. Zumindest im Prinzip beinhalten derartige Scheibenmodelle keine freien Parameter wie etwa die α -Scheiben. Allerdings stehen nach wie vor numerische Rechnungen aus, um verlässliche Aussagen über derartige Modelle machen zu können (siehe auch Lin und Pringle,1987).

Eine weitere Quelle von turbulenten Bewegungen könnten Konvektionsströmungen sein. Das Kriterium für konvektive Instabilität in der rotierenden Akkretionsscheibe unterscheidet sich nur wenig vom bekannten Schwarzschild-Kriterium und wurde von Livio und Shaviv(1977) und Tayler(1980) diskutiert. Im Prinzip kann Konvektion Drehimpuls in radialer Richtung transportieren (Lin und Papaloizou,1980). Vila(1978) und Tayler(1980) haben untersucht, inwieweit thermische Konvektion allein die hohe Viskosität erklären kann. Sie finden, daß dies nur bei genügend kleinen Temperaturen ($T < 10^4 K$), d.h. bei sehr kleinen Akkretionsraten möglich ist. Sie zeigen, daß Konvektion nur Massenakkretionsraten nicht größer als 10^{14} Gramm pro Sekunde bzw. 10^{-12} Sonnenmassen pro Jahr ermöglicht. Von Akkretionsscheiben bei Zwerg-Novae z.B. weiß man allerdings, daß die Massentransferraten größer als 10^{-10} Sonnenmassen pro Jahr sind.

Hinzu kommt, daß Effekte der Rotation auf die Konvektion berücksichtigt werden müssen (Meyer und Meyer-Hofmeister,1982), da die Zeitskala der konvektiven Strömung in vertikaler Richtung größer ist (vermutlich eine Strömung im Unterschallbereich) als die Keplerperiode (vgl. Gl. 3.2). Die Rotation hat im wesentlichen zwei Auswirkungen. Zum einen unterdrückt bzw. erschwert sie das Einsetzen der konvektiven Instabilität (zumindest für den Fall, daß die Viskosität nicht verschwindet, siehe dazu z.B. Chandrasekhar, 1961), und zum anderen verändert Rotation die Topologie der konvektiven Zellstruktur.

Bezüglich des letzten Punktes lassen sich nur Vermutungen anstellen. Wahrscheinlich werden die Konvektionselemente wegen der starken Scherströmung in azimuthaler Richtung verformt und bilden ellipsenförmige Strukturen. Dadurch wird der radiale Austausch von Impuls nochmals eingeschränkt.

Canuto et al.(1984) geben einen Zusammenhang zwischen dem α -Parameter und der Anwachsrate der konvektiv instabilen Moden. Sie zeigen, daß Rotation die Anwachsrate dämpft. Ihre α -Parameter liegen weit unterhalb der von den Beobachtungen abgeleiteten Werte.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß thermische Konvektion in keiner Weise die hohe Viskosität erklären kann. Rotationseffekte verschlechtern diese Situation noch zusätzlich.

Eine weitere Quelle turbulenter Bewegungen könnten Scherinstabilitäten in der differentiell rotierenden Scheibe sein (Zahn,1983,1984). Der nächste Abschnitt behandelt die theoretische Untersuchung solcher Instabilitäten.

3.3.2 Hydrodynamische Instabilitäten

In Kapitel 3.3.1 wurde gezeigt, daß zumindest im Prinzip turbulente Modelle in der Lage sind, die hohen Viskositäten in Akkretionsscheiben zu erklären. Wie bereits erwähnt gibt es bisher allerdings keinerlei Anzeichen für Turbulenz in dünnen Scheiben. Notwendige Voraussetzung für die Entwicklung von Turbulenz ist eine Instabilität in der laminaren Grundströmung, d.h. im Falle von dünnen Akkretions-scheiben in der Keplerströmung.

Die Untersuchung der Stabilität einer Strömung ist eines der schwierigsten Probleme der Hydrodynamik und ist bisher nur für spezielle Fälle zufriedenstellend gelöst. Die meisten Stabilitätsbetrachtungen sind lineare Analysen, bei denen der Einfluß infinitesimal kleiner Störungen auf eine laminare Grundströmung untersucht wird. Ausführliche Darstellungen findet man unter anderem bei Lin(1955), Chandrasekhar(1961), Monin und Yaglom(1971), Josef(1976), Hocking(1978), Drazin und Reid(1981) und Maslowe(1985).

Im Falle einer zwei-dimensionalen, inkompressiblen Scherströmung führen Störungen der Form

$$\psi = \psi(x) \cdot \exp[im(y - ct)] \quad (3.4)$$

in der linearen Stabilitätsanalyse auf die sog. Orr-Sommerfeld-Gleichung

$$(\bar{v} - c) \cdot (\psi'' - m^2 \psi) - \bar{v}'' \psi = \frac{1}{imRe} \cdot (\psi^{IV} - 2m^2 \psi'' + m^4 \psi).$$

Dabei bedeuten $\bar{v}$ die mittlere, laminare Grundströmung in y-Richtung, m die Wellenzahl der Störung in y-Richtung, Re die Reynoldszahl und ψ die sog. "Streamfunction", die durch $u = \psi_y$ und $v = -\psi_x$ mit den Geschwindigkeitskomponenten korreliert ist. Die Größe c ist i.a. komplex. Der Realteil ist die Phasengeschwindigkeit der wellenförmigen Störung, der Imaginärteil bestimmt die Anwachsrate. Das Ziel der linearen Stabilitätsanalyse ist die Berechnung der Anwachsrate als Funktion der Wellenzahl oder möglicherweise anderer Parameter.

Im nicht-viskosen Fall ($Re \rightarrow \infty$) reduziert sich das Stabilitätsproblem auf die Lösung der sog. Rayleigh-Gleichung

$$\psi'' - \left(m^2 + \frac{\bar{v}''}{(\bar{v} - c)} \right) \cdot \psi = 0. \quad (3.5)$$

Die Lösung selbst dieser einfachen, gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung kann erhebliche Schwierigkeiten bereiten, u.a. aufgrund der möglichen Singularität bei der sog. kritischen Schicht x_c , an der gilt

$$\bar{v}(x_c) - c = 0.$$

Die kritische Schicht ist die Stelle, an der sich wellenförmige Störungen mit der Strömung bewegen. Klassische Ergebnisse der Hydrodynamik (siehe z.B. Drazin und Reid, 1981) zeigen, daß gerade diese kritische Schicht für das Auftreten von Instabilitäten von Bedeutung ist (siehe auch unten).

Einfache Stabilitätskriterien lassen sich aus den o.a. Eigenwertgleichungen nur für wenige und ganz spezielle Voraussetzungen ableiten. Bei einer rotierenden, nicht-viskosen und inkompressiblen Strömung erhält man bei axialsymmetrischen Störungen als notwendige und ausreichende Bedingung für Stabilität, daß

$$\frac{\partial l}{\partial r} > 0,$$

d.h., daß der spezifische Drehimpuls l mit radialem Abstand zunimmt. Keplerscheiben sind diesem Kriterium nach gegen axialsymmetrische Störungen stabil.

Auf Längenskalen von der Größenordnung der Scheibendicke ist die Keplerströmung vergleichbar mit einer linearen Scherströmung. Bei einer zweidimensionalen, inkompressiblen und nicht-viskosen Scherströmung erhält man aus der Rayleigh-Gleichung als notwendige Bedingungen für Instabilität:

$$\bar{v}'' = 0 \quad \text{und} \quad \bar{v}'' \cdot (\bar{v} - \bar{v}(x_s)) < 0. \quad (3.6)$$

Diese beiden Kriterien besagen, daß das laminare Geschwindigkeitsprofil einen Inflexionspunkt x_s besitzen muß, und daß die Vortizität in diesem Punkt ein Maximum annimmt. Das erste Kriterium bezeichnet man als Inflexions-Theorem von Rayleigh, das zweite als Fjørtoft-Theorem. Bezogen auf dünne Akkretionsscheiben mit einem Kepler-Geschwindigkeitsprofil würde dies lineare Stabilität bedeuten.

Auch von Laborströmungen her ist eine solche Problematik bekannt. So sagt die lineare Theorie für die ebene Couette-Strömung Stabilität selbst bei unendlich hohen Reynoldszahlen voraus, während man bei Experimenten einen Übergang zur Turbulenz bei Reynoldszahlen in der Größenordnung von 10^3 feststellt. Die ebene Couette-Strömung ist eine Scherströmung, die durch die relative Bewegung von zwei festen Rändern aufrecht erhalten wird und ein lineares Geschwindigkeitsprofil aufweist. Hier nun geht die Vermutung dahin, daß die nicht-lineare Wechselwirkung zu Instabilitäten führt. Sie ist es gerade, die Energie von großräumigen Strukturen in kleinskalige Elemente transportiert und somit die Entwicklung von Turbulenz ermöglicht. Die Frage, ob auch die Keplerströmung gegenüber endlichen Störungen instabil wird, kann nur eine Analyse der vollen nicht-linearen hydrodynamischen Gleichungen beantworten. Aus diesem Grunde befasst sich ein weiterer Teil dieser Arbeit mit der nicht-linearen zeitlichen Entwicklung von turbulenten Fluktuationen in einer dünnen Akkretionsscheibe.

Die lineare Stabilitätstheorie läßt die Möglichkeit zu, daß Wellen beliebiger Art in einer Scherströmung an der korotierenden Schicht reflektiert werden können mit einem Reflektionskoeffizienten größer als eins. Dieses Phänomen bezeichnet man als "Over-Reflektion". Es ist sehr intensiv u.a. von Jones(1968), Acheson(1976), Mark(1976) und Boyd(1983) studiert worden.

Lindzen und Tung(1978) haben gezeigt, daß die Stabilitätskriterien von Rayleigh und Fjørtoft (Gl. 3.6) nicht nur notwendige Bedingungen für Instabilität sind, sondern auch ausreichende Bedingungen für die Existenz und die Over-Reflektion von Wellen. Danach ist nicht der Inflexionspunkt, sondern die kritische Schicht der Ort der Wechselwirkung zwischen der Scherströmung und den Wellen. Lindzen und Barker(1985) weisen darauf hin, daß notwendig für Over-Reflektion die Möglichkeit der Wellenausbreitung auf beiden Seiten der korotierenden Schicht ist. Wesentlich erscheint, daß ein Energiefluß durch die kritische Schicht möglich ist, d.h. daß Wellen die kritische Schicht erreichen und mit ihr wechselwirken können. Allerdings ist die einfache Existenz der kritischen Schicht nicht ausreichend für Over-Reflektion.

Liegt der Korotationspunkt innerhalb des Bereichs, in dem sich die Wellen ausbreiten können, so geht die zur Strömungsrichtung normale Komponente der Gruppengeschwindigkeit gegen Null. Das bedeutet, daß die Ausbreitungszeit für Wellen, den Korotationspunkt zu erreichen, gegen Unendlich geht, und daß die Wechselwirkung zwischen der Scherströmung und dem Korotationspunkt unterdrückt wird. Dies kann überwunden werden durch ein Gebiet zwischen dem Ausbreitungsbereich der Wellen und der kritischen Schicht, in der der Brechungsindex negativ wird. Dies erlaubt die Möglichkeit, daß Wellen mit dem Korotationspunkt wechselwirken, da die Ausbreitungszeit in diesem Fall endlich bleibt und das Durchtunneln des Energieflusses innerhalb des exponentiellen Bereichs ebenfalls in endlicher Zeit erfolgt.

Damit läßt sich auch die Instabilität der viskosen Poiseuille Strömung verstehen. Die Poiseuille-Strömung wird durch einen konstanten Druckgradienten getrieben und hat ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil. Wenn die Viskosität genügend klein ist sind im Labor fast alle Strömungen instabil, selbst wenn die nicht-viskose Analyse Stabilität voraussagt. In der Poiseuille Strömung kann ein Mode zwei kritische Schichten haben (siehe Rayleigh-Gleichung 3.5). Zwischen diesen beiden Schichten befindet sich ein Bereich, in dem Wellenausbreitung möglich ist, außerhalb allerdings nicht. Nach dem Inflexions-Theorem von Rayleigh ist die Poiseuille-Strömung stabil, man weiß aber, daß sie instabil wird bei genügend kleiner Viskosität. Die Viskosität wirkt wie eine Senke für den Energiefluß und macht Over-Reflektion möglich. Lindzen und Rambaldi(1986) konnten dies durch numerische Rechnungen bestätigen.

Allerdings läßt sich damit nicht die Instabilität der linearen, inkompressiblen Couette-Strömung verstehen, und damit auch der Keplerströmung, da in diesem Fall in keinem Bereich Wellenausbreitung auftreten kann.

Bei all den bisher erwähnten Analysen ist Inkompressibilität vorausgesetzt worden. Die Effekte der Kompressibilität auf ebene Scherströmungen sind mehrfach untersucht worden (Blumen 1970, Drazin und Davey 1977, Blumen et al. 1977, Ray 1982). Sie zeigen, daß sich das Spektrum von Instabilitäten durch das Auftauchen neuer instabiler Moden erweitert, wenn ein System die Ausbreitung zusätzlicher Wellen, hier von Schallwellen, erlaubt. Damit könnte Kompressibilität auch für lineare Scherströmungen Over-Reflektion ermöglichen.

Die Bedeutung der Over-Reflektion für die Stabilität von astrophysikalischen Strömungen wurde zuerst von Drury(1980) hervorgehoben. Von differentiell rotierenden Akkretionstori weiß man (Papaloizou und Pringle 1984), daß sie bei nicht-axialsymmetrischen Störungen instabil sind. Papaloizou und Pringle(1984) betrachten als notwendige Voraussetzung Kompressibilität und die Bedingung, daß der instabile Mode an einem Punkt mit der Strömung korotieren muß (Papaloizou und Pringle 1985,1987). Mittlerweile sind diese Instabilitäten unter den verschiedensten Aspekten analysiert worden (Blaes (1985a,b), Drury(1985), Goldreich et al. (1986), Blaes und Glatzel(1986), Glatzel(1987a,b)).

Nach diesen Untersuchungen ergibt sich das folgende Bild dieser Instabilitäten. Die von Papaloizou und Pringle(1984) gemachte Voraussetzung der Kompressibilität erscheint nicht unbedingt notwendig. Vielmehr ist erforderlich, daß sich Wellen ganz beliebiger Form (Oberflächen-, Vortizitäts- oder akustische Wellen) überhaupt ausbreiten können. Instabilitäten können sich entwickeln, sobald diese Wellen an der korotierenden Schicht miteinander wechselwirken.

Goldreich und Narayan(1985) haben gezeigt, daß die von Papaloizou und Pringle(1984,1985) für Tori gefundenen Instabilitäten auch in dünnen Akkretionsscheiben bei beliebiger Drehimpulsverteilung existieren. In diesem Fall führt die lineare Stabilitätsanalyse auf die Lösung der sog. parabolischen Zylindergleichung für die azimuthalen Geschwindigkeitsfluktuationen. In Kapitel 3.3.3 werden die Gleichungen des linearen Stabilitätsproblems in einer dünnen Akkretionsscheibe abgeleitet und auf die Physik der anwachsenden Moden eingegangen.

3.3.3 Die Berechnung der instabilen Eigenfunktionen und Eigenwerte

Ausgangspunkt bildet das System (2.14-2.18) der hydrodynamischen Gleichungen für einen mitrotierenden Beobachter in einer dünnen Akkretionsscheibe. Spaltet man die azimuthale Geschwindigkeitskomponente auf in die Keplerströmung v_{kep} (Gl. 2.19) und einen turbulenten Anteil v_t gemäß

$$v(x, y, t) = v_{kep}(x) + v_t(x, y, t) = -1.5 \cdot x + v_t(x, y, t) \quad (3.10)$$

und

$$u(x, y, t) = u_t(x, y, t), \quad (3.11)$$

so erhält man für die turbulenten Fluktuationen unter der Voraussetzung einer adiabatischen Strömung das folgende Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_t}{\partial x} + u_t \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_t}{\partial y} + v_t \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{3}{2} x \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad (3.12)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_t}{\partial t} + u_t \frac{\partial u_t}{\partial x} + v_t \frac{\partial u_t}{\partial y} - 2v_t - \frac{3}{2} x \frac{\partial u_t}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.13)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_t}{\partial t} + u_t \frac{\partial v_t}{\partial x} + v_t \frac{\partial v_t}{\partial y} + \frac{1}{2} u_t - \frac{3}{2} x \frac{\partial v_t}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_t \frac{\partial p}{\partial x} + v_t \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{3}{2} x \frac{\partial p}{\partial y} = \gamma \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_t \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_t \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{3}{2} x \frac{\partial \rho}{\partial y} \right). \quad (3.15)$$

Bei der Herleitung wurde angenommen, daß die Rossby-Zahl $R_o = 1$ ist. Linearisiert man diese Gleichungen gemäß

$$\begin{array}{lll} \rho = \rho_0 + \rho_1 & \text{mit} & \rho_0 = \text{const.}, \\ p = p_0 + p_1 & \text{mit} & p_0 = \text{const.}, \\ u_t = u_{t1} & \text{und} & v_t = v_{t1}, \end{array}$$

so ergibt dies

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial u_{t1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{t1}}{\partial y} - \frac{3}{2} x \frac{\partial \rho_1}{\partial y} = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial u_{t1}}{\partial t} - 2v_{t1} - \frac{3}{2} x \frac{\partial u_{t1}}{\partial y} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial v_{t1}}{\partial t} + \frac{1}{2} u_{t1} - \frac{3}{2} x \frac{\partial v_{t1}}{\partial y} = -\frac{\partial p_1}{\partial y}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{3}{2} x \frac{\partial p_1}{\partial y} = \gamma \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} - \frac{3}{2} x \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right). \quad (3.19)$$

Dieses Gleichungssystem ist homogen in t und y und erlaubt eine Entwicklung nach Wellen der Form

$$\exp(-i\omega t + imy).$$

Damit wird der folgende Ansatz für die Störfunktionen gemacht:

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ u_{t1} \\ v_{t1} \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(x) \\ u_t(x) \\ v_t(x) \\ p(x) \end{pmatrix} \cdot \exp(-i\omega t + imy). \quad (3.20)$$

Eingesetzt in das lineare Gleichungssystem (3.16-3.19) erhält man:

$$-i\omega\rho + \frac{\partial u_t}{\partial x} + imv_t - \frac{3}{2}imx \cdot \rho = 0, \quad (3.21)$$

$$-i\omega u_t - 2v_t - \frac{3}{2}imx \cdot u_t = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.22)$$

$$-i\omega v_t + \frac{1}{2}u_t - \frac{3}{2}imx \cdot v_t = -imp, \quad (3.23)$$

$$-i\omega p - \frac{3}{2}imx \cdot p = \gamma \left(-i\omega\rho - \frac{3}{2}imx \cdot \rho \right). \quad (3.24)$$

Daraus lassen sich Druck- und Geschwindigkeitsfluktuationen folgendermaßen berechnen:

$$p \left(\frac{1}{\gamma \cdot m^2} + \frac{1}{D} + \frac{6}{D^2} \right) - \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dp}{D} \right) = 0, \quad (3.25)$$

$$u_t = -\frac{1}{D} \cdot \left(2imp + a \frac{dp}{dx} \right), \quad (3.26)$$

$$v_t = \frac{1}{D} \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} - aimp \right), \quad (3.27)$$

mit

$$\zeta = m \cdot x,$$

$$a(x) = -i \cdot \left(\omega + \frac{3}{2} \cdot mx \right)$$

und

$$D(x) = 1 + a(x)^2.$$

Löst man das Gleichungssystem (3.21 - 3.24) nach den azimuthalen Geschwindigkeitsfluktuationen v_t auf und definiert

$$\sigma(x) := \omega + \frac{3}{2} \cdot mx = \frac{3}{2}m \cdot (x - x_c) = \frac{3}{2}m(x - \Re(x_c) - \Im(x_c)) \quad (3.28)$$

als die imaginäre Phasengeschwindigkeit der wellenförmigen Störung relativ zur Keplerströmung, so erhält man:

$$\frac{d^2 v_t}{dx^2} + \left[\frac{(\sigma^2 - 1)}{\gamma} - m^2 \right] v_t = 0,$$

$$\rho = \frac{1}{(\gamma m^2 + \frac{1}{4})} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{dv_t}{dx} + m\sigma \cdot v_t \right]$$

und

$$u_t = -\frac{i}{(\gamma m^2 + \frac{1}{4})} \cdot \left[\gamma m \cdot \frac{dv_t}{dx} - \frac{1}{2} \sigma \cdot v_t \right].$$

Diese Gleichungen sind identisch mit den Gln. (2.24-2.26) von Narayan et al.(1987) im Fall der Keplerströmung (d.h. in ihrer Notation bei $A = -\frac{3}{4}$, $q = \frac{3}{2}$, $B = \frac{1}{4}\Omega$ und $\kappa = \Omega$, Narayan et al. geben allerdings fälschlicher Weise $B = \frac{1}{2}\Omega$ an) und in der Skalierung dieser Arbeit mit der Keplerrotation Ω als charakteristische Zeitskala und der isothermen Schallgeschwindigkeit als typische Geschwindigkeit.

Wählt man als neue unabhängige Variable

$$X = \left(\frac{3m^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot [x - \Re(x_c)],$$

so erhält man aus Gleichung (3.28) die Standardform der parabolischen Zylindergleichung:

$$\frac{d^2 v_t}{dX^2} + Q(X) \cdot v_t = 0 \quad (3.29)$$

mit

$$Q(X) = \frac{1}{4} \cdot (X - i\lambda)^2 - C,$$

$$\lambda = \left(\frac{3m}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \Im(x_c)$$

und

$$C = \frac{\gamma m^2 + 1}{3m\gamma^{\frac{1}{2}}}.$$

Gleichung (3.29) unterscheidet sich von der Rayleigh-Gleichung (3.5) dadurch, daß keine Singularität auftaucht. Der Korotationspunkt liegt bei $X=0$, λ ist ein Maß für die Anwachsrate der Moden.

Die Lösungen dieser Gleichung bestehen aus wellenförmigen Störungen außerhalb der kritischen Schicht ($Q(X) > 0$). Unmittelbar um den Korotationspunkt herum allerdings ist keine Wellenausbreitung möglich ($Q(X) < 0$).

Die Physik dieser anwachsenden Moden läßt sich am besten durch Energiebetrachtungen verstehen bzw. durch Analyse der Ausbreitungsrichtung, in der die Wellen Energie transportieren, d.h. durch Untersuchung des Wellenvektors relativ zur Ausbreitung.

Auf beiden Seiten der Korotation sind nach Gleichung (3.29) zwei unabhängige Wellen möglich, eine ein- und eine auslaufende Welle. Nach Abramowitz und Stegun(1972) lautet ihre asymptotische Form ($|X| \gg 2C^{\frac{1}{2}}, \gg |\lambda|$) folgendermaßen:

$$v_{t,out} \simeq \sqrt{\frac{2}{|X|}} \cdot \begin{cases} \exp(+\frac{i}{4}X^2 + \frac{1}{2}\lambda|X|) & \text{für } X > 0 \\ \exp(-\frac{i}{4}X^2 + \frac{1}{2}\lambda|X|) & \text{für } X < 0 \end{cases}$$

und

$$v_{t,in} \simeq \sqrt{\frac{2}{|X|}} \cdot \begin{cases} \exp(-\frac{i}{4}X^2 - \frac{1}{2}\lambda|X|) & \text{für } X > 0 \\ \exp(+\frac{i}{4}X^2 - \frac{1}{2}\lambda|X|) & \text{für } X < 0. \end{cases}$$

Ein- und auslaufende Wellen sind bezüglich des Korotationspunktes definiert. Wenn man den wellenförmigen Teil durch einen Wellenvektor $k(X)$ über $\exp(i \int k(X)dX)$ repräsentiert, so erhält man:

$$k_{out} = \begin{cases} +\frac{1}{2}X & \text{für } X > 0 \\ -\frac{1}{2}X & \text{für } X < 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

und

$$k_{in} = \begin{cases} -\frac{1}{2}X & \text{für } X > 0 \\ +\frac{1}{2}X & \text{für } X < 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Daran erkennt man, daß im Bereich $X > 0$ der Wellenvektor für auslaufende Wellen nach außen zeigt und für einlaufende Wellen nach innen. Hingegen gilt im Bereich $X < 0$, daß auslaufende Wellen einen positiven Wellenvektor besitzen und einlaufende Wellen negativen. Das bedeutet, daß sich an der korotierenden Schicht das Vorzeichen des Energieflusses umkehrt.

Dieses Verhalten zeigt sich auch, wenn man die Gruppengeschwindigkeit v_{gr} relativ zur Keplerströmung v_{Kep} (Gl. 3.28) in azimuthaler Richtung betrachtet.

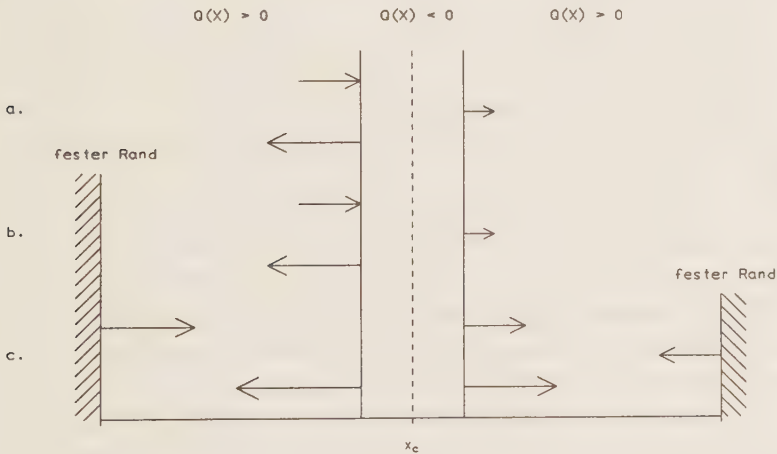
$$v_{gr} = \frac{d}{dm}(\omega - m \cdot v_{Kep}) = \frac{d}{dm} \left(\frac{3}{2}m(x - x_c) \right) = \frac{3}{2} \cdot (x - x_c). \quad (3.32)$$

Daran erkennt man, daß die Gruppengeschwindigkeit auf beiden Seiten der korotierenden Schicht unterschiedliches Vorzeichen hat. Der physikalische Grund liegt darin, daß sich auf der einen Seite (normalerweise die Innenseite mit $X < 0$) die

Welle bzgl. der Grundströmung rückwärts bewegt und damit die Gruppengeschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung des Wellenvektors weist, während sich auf der anderen Seite (normalerweise der äußere Bereich mit $X > 0$) die Welle in Richtung der Strömung ausbreitet.

Eine auf die korotierende Schicht einlaufende Welle wird teilweise reflektiert und teilweise transmittiert. Für den Energiefluß bedeutet dies nach Gleichung(3.30,3.31), daß er seine Richtung am Korotationspunkt ändert. Die von $X < 0$ auf die korotierende Schicht einlaufende Welle hat einen Energiefluß in die entgegengesetzte Richtung ihrer Ausbreitung. Die transmittierte Welle in $X > 0$ hingegen besitzt einen Energiefluß in Ausbreitungsrichtung. Die Bilanz der Energieflüsse kann nur dann stimmen, wenn die reflektierte Welle eine größere Amplitude hat als die einlaufende Welle. Dieses Phänomen bezeichnet man als Over-Reflektion.

Die Verhältnisse sind in Abbildung 3.1 dargestellt. In 3.1a wird eine auf die korotierende Schicht einlaufende Welle aufgespalten in eine transmittierte und eine



Figur 3.1: Die unterschiedlichen Lösungsgebiete der parabolischen Zylindergleichung

over-reflektierte Welle. Eine Instabilität kann sich dann entwickeln, wenn die over-reflektierte Welle ständig mit der korotierenden Schicht wechselwirkt (Drury,1980

und Lindzen und Barker,1985). Eine solche Rückkopplung kann durch einen inneren festen Rand gegeben sein. Bei einem geeigneten Abstand vom Korotationspunkt bzw. bei geeigneten Phasenbeziehungen verhält sich der innere Bereich wie ein Resonanzraum (Abbildung 3.1b und 3.1c). Die over-reflektierte Welle kann ständig mit der korotierenden Schicht wechselwirken und weiterhin anwachsen. Befindet sich auch im äußeren Bereich ein fester Rand (Abbildung 3.1c), so können sich zwei Resonanzräume bilden und die Instabilität verstärken (Narayan et al.,1987).

In dieser Arbeit wurden die Eigenmoden aus dem Gleichungssystem (3.25-3.27) bestimmt. Parameter der Rechnungen ist $(\gamma \cdot m^2)$ und wurde bei den benutzten Modellen zu 0.5, 1.0 und 1.5 gewählt (siehe Tabelle 2.1). Dabei bedeutet

$$\gamma \cdot m^2 = 1,$$

daß die azimutale Wellenzahl m in Einheiten von $\frac{1}{h_0}$ den Werte $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ hat. Bei dünnen Akkretionsscheiben liegt $\frac{\tau}{h_0}$ in der Größenordnung von 30 bis 100. In dem Fall bedeutet $\gamma \cdot m^2 = 1$ also, daß man 30-100 Wellenlängen in azimutaler Richtung hat.

Aus den linearen Stabilitätsanalysen (siehe Kapitel 3.3.2) weiß man, daß für die Entwicklung von Instabilitäten notwendig ist, daß sich die korotierende Schicht innerhalb der Strömung befindet. Bei der Berechnung der instabilen Moden wurde deshalb ein Bezugssystem gewählt, das sich mit dem Korotationspunkt mitbewegt ($Re(\omega) = 0$).

Als Randbedingungen wurden entweder zwei feste Ränder (FF) oder ein innerer fester und ein äußerer transmittierender Rand (TF) gewählt. Im Fall der festen Ränder bedeutet dies, daß der Real- und Imaginärteil der radialen Geschwindigkeit auf dem Rand verschwinden muß. Bei der transmittierenden Randbedingung wurde die auslaufende Welle der asymptotischen Lösung (Gleichungen (3.25-3.27) für $x \gg 1$) am äußeren Rand benutzt. Dann wurde die Integration zum inneren Rand über den Korotationspunkt ($x=0$) hinaus fortgesetzt bis der Realteil der turbulenten, radialen Geschwindigkeit verschwindet. Die Anwachsrate η wurde soweit verändert, bis auch der Imaginärteil von u_t an dieser Stelle Null ist. Damit hat man als Teil der Lösung die Position des inneren, festen Randes und die Anwachsrate der linear instabilen Moden. Die Berechnung der instabilen Eigenfunktionen und der Anwachsrate wurden aus Ergebnissen von Spruit(1985) entnommen.

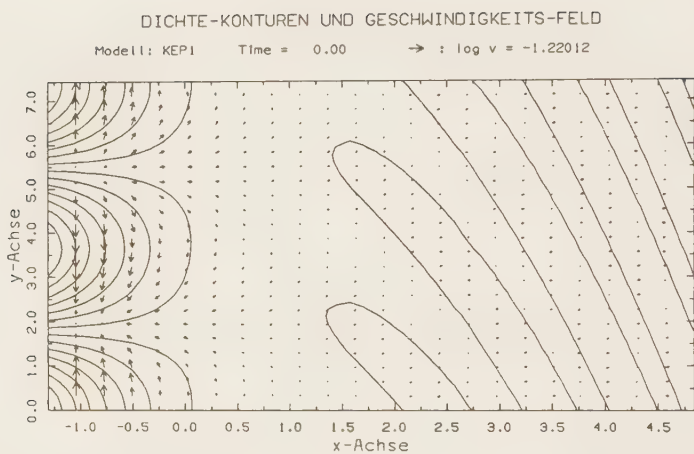
In der folgenden Tabelle 3.1 sind die berechneten instabilen Modelle, deren Anwachsrate η , die gewählten radialen Randbedingungen am Innen-/Außenrand des Rechengitters (F: fest, T: transmittierend) und der Parameter $(\gamma \cdot m^2)$ bzw. die azimutale Wellenzahl in Einheiten von $\frac{1}{h_0}$ aufgelistet. Weiterer Parameter der Anfangsmodele ist die Anzahl der radialen Nullstellen n_0 in den Geschwindigkeitsfluktuationen u_t zwischen dem inneren festen Rand und dem Korotationspunkt (die Nullstelle am Innenrand mitgerechnet).

Tabelle 3.1: Parameter der instabilen Eigenmoden

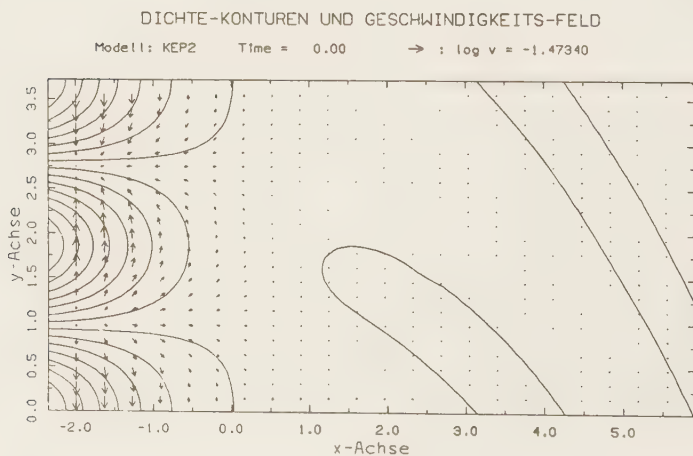
Modell	KEP1	KEP2	KEP3	KEP4	KEP5
η	$7.32 \cdot 10^{-3}$	$2.46 \cdot 10^{-3}$	$1.55 \cdot 10^{-3}$	$8.10 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-3}$
Randbed.	F/T	F/T	F/T	F/T	F/F
$m(\frac{1}{h_0})$	1.0	0.5	1.0	1.5	1.0
n_0	1	1	2	1	1

Die Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung der linear instabilen Eigenfunktionen ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Bei dieser Darstellung wurde eine willkürliche Amplitude der instabilen Eigenmoden gewählt. In azimutaler Richtung ist jeweils eine Wellenlänge entsprechend der Wellenzahl $\frac{1}{h_0}$ aufgetragen. Die radiale Koordinate ist so gewählt, daß sich bei $x=0$ der Korotationspunkt befindet. Durch diese Wahl des Bezugssystems ist die Welle stationär ($Re(\omega) = 0$). Man erwartet also nach der linearen Theorie, daß sich diese aus stehenden akustischen Wellen zusammengesetzte Anfangsverteilung der Fluktuationen räumlich stationär verhält; allerdings mit in der Zeit wachsenden Amplituden entsprechend den linearen Anwachsrate. In den Abbildungen 3.2a und 3.2c bis 3.2e ist deutlich zu erkennen, daß die Wellenlänge der Störungen in radialer Richtung abnimmt. Dies resultiert daraus, daß die Schallgeschwindigkeit konstant bleibt, während die Frequenz der Wellen in dem mitrotierenden Bezugssystem nach außen zunimmt.

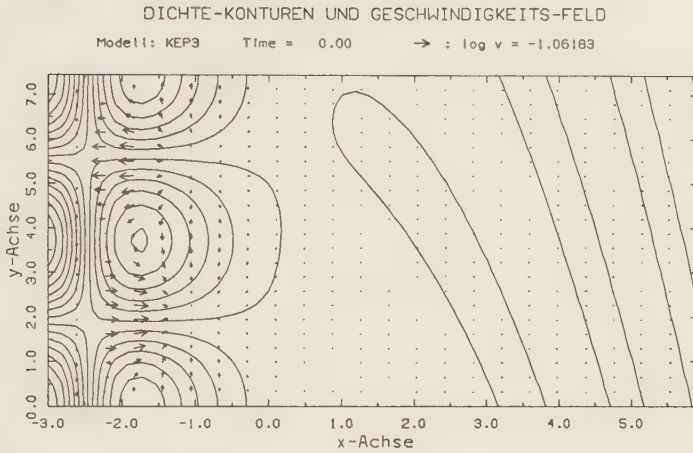
Die linear instabilen Eigenmoden wurden als Anfangsbedingungen für die numerischen Simulationen benutzt. Die Ergebnisse dieser nicht-linearen Entwicklungsrechnungen werden in Kapitel 5.1.1 dargestellt.



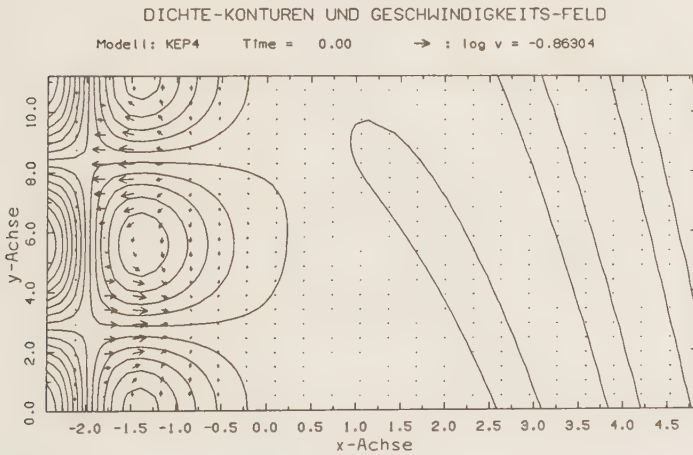
Figur 3.2a: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen der linear instabilen Eigenfunktionen von Modell KEP1



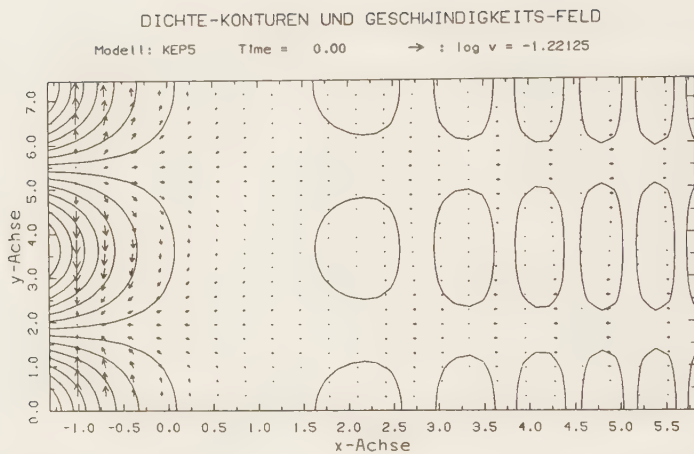
Figur 3.2b: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen der linear instabilen Eigenfunktionen von Modell KEP2



Figur 3.2c: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen der linear instabilen Eigenfunktionen von Modell KEP3



Figur 3.2d: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen der linear instabilen Eigenfunktionen von Modell KEP4



Figur 3.2e: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen der linear instabilen Eigenfunktionen von Modell KEP5

3.4 Zusammenfassung der Problematik und Ziel der Arbeit

Eines der grundlegendsten Probleme in der Theorie der Akkretionsscheiben ist die Dissipation. Sie erst ermöglicht es, die orbitale kinetische Energie in Strahlung umzuwandeln, den Drehimpuls nach außen zu transportieren und die Materie auf ein Zentralobjekt akkretieren zu lassen. Molekulare Viskosität ist um mehrere Größenordnungen zu klein, um überhaupt einen Akkretionsvorgang zu erzeugen.

Diese Arbeit untersucht hydrodynamische Prozesse, die für die offensichtlich hohe Viskosität in dünnen Akkretionsscheiben vorgeschlagen wurden. Dabei handelt es sich zum einen um den erhöhten Energie- und Impulstransport durch Turbulenz und zum anderen um die erhöhte Dissipation in Stoßwellen innerhalb der Scheibe.

Bezüglich der turbulenten Modelle liegt das Hauptproblem darin, daß notwendig für das Einsetzen von Turbulenz in dünnen Scheiben eine Instabilität in der Keplerströmung ist. Das Stabilitätsproblem der Keplerströmung ist allerdings noch weit von einer Lösung entfernt. Die hohe Reynoldszahl in Akkretionsscheiben mag Hinweise auf Turbulenz geben. Dies wird von Laborexperimenten (vgl. die rotierende Couette- oder die ebene Couette-Strömung) abgeleitet. Allerdings sind die experimentellen Untersuchungen vollkommen unrealistisch für astrophysikalische Verhältnisse. Im Labor studiert man gewöhnlich die Stabilität einer subsonen Strömung eines inkompressiblen Mediums in einem homogenen Gravitationsfeld, während in Akkretionsscheiben eine extreme supersonische Strömung in einem kompressiblen und geschichteten Medium vorliegt. Desweiteren betrachtet man in Laborexperimenten die Stabilität einer Strömung zwischen festen Rändern. Bei den meisten astrophysikalischen Problemen hingegen existieren überhaupt keine Ränder, und man weiß, daß das Einsetzen von Turbulenz sehr stark von Randbedingungen abhängig ist.

Der bisher einzige Hinweis auf Instabilität von der theoretischen Seite kommt von den sog. instabilen akustischen Moden, die durch Over-Reflektion an der kritischen Schicht hervorgerufen werden. Allerdings beschränken sich diese Untersuchungen auf die lineare Stabilität. Das Auftreten einer linearen Instabilität bedeutet noch nicht, daß Turbulenz einsetzt. Sicherlich bedeutet Instabilität, daß sich der Zustand des Systems ändert. Das exponentielle Anwachsen hingegen ist eine Folge der Linearisierung und hat nur Gültigkeit, solange die Störung klein bleibt. Schließlich werden nicht-lineare Effekte bedeutsam, die zumindest ab einem bestimmten Punkt stabilisierend wirken können. Damit kann das System einen oder mehrere Gleichgewichtszustände einnehmen bevor Turbulenz auftritt.

Das bedeutet, daß eine Vorhersage und Beschreibung des Übergangs zur Turbulenz weit über die Möglichkeiten einer linearen Theorie hinausgehen. Trotz dieser Beschränkungen ist die lineare Theorie von Bedeutung, da sie zweifelsohne die frühe Entwicklung infinitesimal kleiner Störungen korrekt beschreibt und da sie als Ausgangspunkt für nicht-lineare Analysen dienen kann.

Aus diesem Grunde ist der erste Teil dieser Arbeit dem Studium der nicht-linearen Zeitentwicklung von Fluktuationen in einer dünnen Scheibe gewidmet. Als Anfangsbedingungen werden die nach der linearen Theorie in 3.5.3 berechneten instabilen Eigenmoden gewählt. Die numerischen Simulationsrechnungen sollen zeigen, ob sich in der Scheibe Turbulenz ausbildet, wie groß die charakteristischen Längen und Geschwindigkeiten sind und welcher Drehimpulstransport bzw. welcher α -Parameter sich aus solchen turbulenten Modellen ableiten läßt. Die Ergebnisse der numerischen Rechnungen werden in Kapitel 5.1 vorgestellt.

Ein weiterer Teil der Arbeit beschäftigt sich mit Stoßwellen in Akkretions-scheiben. Es ist allgemein bekannt, daß nicht-axialsymmetrische Störungen spiralförmige Stoßwellen in differentiell rotierenden Scheiben bilden können. Ursache solcher Störungen mögen externe Gründe sein wie etwa Gezeitenkräfte des Begleitsterns oder das Auftreffen des Akkretionsstroms am äußeren Rand der Scheibe, aber auch interne Gründe, z.B. ein asymmetrisches Gravitationspotential des kompakten Objekts oder eine asymmetrische Magnetosphäre eines Neutronensterns. Bei stationärer Akkretion erwartet man, daß die Magnetosphäre ungefähr mit Kepler-geschwindigkeit rotiert (Frank et al., 1985). Bei Schwankungen um die stationäre Akkretionsrate kann damit die Magnetosphäre entweder etwas schneller oder etwas langsamer rotieren.

Die Effekte solcher Störungen sind bisher u.a. von Shu(1976), Weber(1979) und Sawada et al.(1985,1986,1987) studiert worden. Allerdings lassen diese Untersuchungen keine quantitative Aussagen über den Drehimpulstransport zu. Spruit(1986) zeigt, daß die hydrodynamischen Gleichungen in dünnen Akkretionsscheiben Ähnlichkeitslösungen von Stoßwellen besitzen. In diesem Fall erhält man Hinweise auf die Stärke der Stoßwellen und damit auf die daraus resultierende Viskosität. Hierzu haben Spruit et al.(1987) gezeigt, daß in Scheiben mit großem Verhältnis von Außenradius zu Innenradius jede stationäre Stoßlösung einen Bereich in radialer Richtung hat, wo die Lösung ungefähr ähnlich ist. Auch die numerischen Ergebnisse von Sawada et al.(1985,1986) folgen dieser Ähnlichkeitslösung.

In dem zweiten Teil der Arbeit wird die Auswirkung von Stoßwellen auf die Viskosität studiert. Zu diesem Zweck wird in nicht-linearen Simulationsrechnungen die Ausbreitung von Störungen innerhalb der Akkretionsscheibe untersucht. Als Anfangsbedingung wird eine Störung am Innen- bzw. Außenrand des Rechengitters gewählt, die entweder schneller oder langsamer als mit Keplergeschwindigkeit an der entsprechenden radialen Position rotiert.

Dem Korotationspunkt, bei dem die Störung mit der Scheibe korotiert, kommt dabei besondere Bedeutung zu (siehe Kapitel 5.2). Im Gegensatz zu allen bisherigen Studien, die vorwiegend das globale Verhalten der Scheibe untersuchen, wird in dieser Arbeit die Ausbreitung und Entwicklung der Störung in der Nähe des Korotationspunktes studiert. Zentrale Fragen der Untersuchungen sind, ob Störungen von innen oder außen Stoßwellen erzeugen, welche Bedeutung der Korotationspunkt für die Ausbreitung der Störungen hat und welcher Impulstransport aus derartigen Störungen resultiert. Die Ergebnisse der numerischen Rechnungen werden in Kapitel 5.2 zusammengefaßt.

4. Die numerische Behandlung der nicht-linearen hydrodynamischen Gleichungen

Die in Kapitel 2 abgeleiteten hydrodynamischen Gleichungen werden mit Hilfe eines zwei-dimensionalen Differenzenverfahrens numerisch gelöst. Im folgenden wird auf die numerische Behandlung der nicht-linearen Differentialgleichungen eingegangen.

Besonderes Augenmerk bei der numerischen Behandlung wird auf die künstliche Viskosität und auf die Randbedingungen gelegt. Im Gegensatz zu den meisten bisherigen Simulationsrechnungen wird neben der üblichen künstlichen Kompressionsviskosität eine sog. künstliche Scherviskosität eingeführt. Diese Erweiterung stellt sich als außerordentlich sinnvoll für die numerische Berechnung von Turbulenz heraus.

Die numerische Behandlung der Ränder ist eines der schwierigsten Probleme bei der Simulation von astrophysikalischen Strömungen. Häufig dienen sie nur dazu, um die Größe des Rechengitters zu begrenzen. Um die Akkretionsströmung innerhalb einer Scheibe zu simulieren, in der eigentlich überhaupt keine Ränder existieren, werden aus diesem Grunde sog. transmittierende Randbedingungen benutzt.

Der Aufbau dieses Kapitels ist wie folgt. In 4.1.1 wird der Rechencode beschrieben, in 4.1.2 die künstliche Viskosität, und in 4.1.3 erfolgt eine nähere Erläuterung zur Behandlung der Randwerte. Daran anschließend werden in 4.2 einige Ergebnisse von Testrechnungen vorgestellt; zum einen Simulationen, die das Verhalten der Randbedingungen zeigen (Shock-tube bei festen und transmittierenden Rändern, Sedov-Lösung bei transmittierenden Randbedingungen) und zum anderen Stabilitätsanalysen von Laborströmungen (ebene Poiseuille- und ebene Couette-Strömung), die den Vergleich mit experimentellen Ergebnissen zulassen.

4.1 Das numerische Rechenverfahren

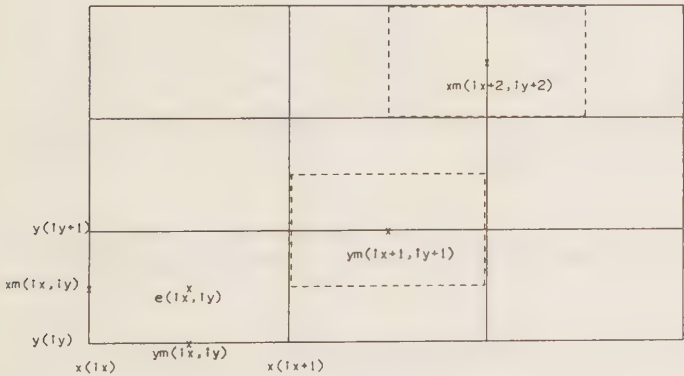
4.1.1 Der Rechencode

Die hydrodynamischen Gleichungen werden mit Hilfe eines expliziten Differenzenschemas auf einem äquidistanten, kartesischen Euler-Gitter von $N_X \cdot N_Y$ Gitterzellen numerisch gelöst. Differenzenverfahren von räumlich erster Ordnung besitzen i.a. starke diffusive Eigenschaften und sind damit gerade in der Lage einen groben Überblick der simulierten Vorgänge zu geben. Sobald Details oder Instabilitäten der

Strömung von Bedeutung sind, sollten sie deshalb durch numerische Differenzenmethoden höherer Ordnung ersetzt werden.

Als Grundlage dieser Arbeit dient ein von Różycka(1985) entwickelter zweidimensionaler Computer-Code (siehe auch Hawley et al.,1984a und Kley und Hensler,1987). Er ist von zweiter Ordnung im Raum und von semi-zweiter Ordnung in der Zeit. Stoßfronten werden stabilisiert durch eine künstliche "von Neuman Viskosität" (siehe 4.1.2). Die Behandlung des Kompressionsterms in der Energiegleichung erfolgt durch zeitliche Mittelung in zweiter Ordnung.

Dem Differenzenschema liegt ein versetztes Gitter zugrunde, bei dem skalare und vektorielle Größen an verschiedenen Punkten im Gitter definiert sind. Die Abbildung 4.1 zeigt einen Ausschnitt aus dem Rechengitter mit der Position der hydrodynamischen Variablen. Skalare Größen einer gegebenen Gitterzelle sind in der Zellmitte definiert, vektorielle Größen in der Mitte der jeweiligen Zellwände. Diese Anordnung erlaubt eine einfache Bildung der Differenzengleichung. Die durchgezogenen Zellen definieren die Volumenelemente, die von den skalaren Größen gebildet werden, die gestrichelten Zellen kennzeichnen die Volumenelemente der azimuthalen Vektorkomponenten bzw. die der radialen Komponenten.



Figur 4.1: Ausschnitt aus dem Rechengitter mit der Position der hydrodynamischen Variablen.

Zur Zeit t_n sind alle explizit zeitabhängigen Parameter (Dichte ρ , innere spezifische Energie e , und die Impulsdichten $xm = [\rho \cdot u]$ in radialer Richtung und $ym = [\rho \cdot v]$ in azimuthaler Richtung) an allen Gitterpunkten (ix, iy) bekannt (z.B. Anfangswerte). Das numerische Problem besteht darin, eine Lösung der hydrodynamischen Gleichungen (2.14 – 2.18) zur Zeit $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ zu finden.

Die zeitliche Entwicklung wird durch ein Aufspalten des Zeitschrittalgorithmus in sukzessive numerische Operationen ("Operator-Splitting") behandelt (Norman, 1980). Zunächst wird die Wirkung der Quellterme zur Bestimmung aktualisierter Werte zeitlich vorwärts extrapoliert. Als letzter Schritt erfolgt die Ausführung der Advektion zur Bestimmung der Werte zum Zeitpunkt t_{n+1} . Diese Aufspaltung macht den Code zu zeitlich semi-zweiter Ordnung. Vorausgesetzt, daß der Zeitschritt genügend klein ist, sollte diese Aufspaltung die Genauigkeit der Lösung nur unwesentlich beeinflussen.

Im folgenden wird auf die verschiedenen Zeit-Unterschritte (Substeps) im einzelnen eingegangen.

Substep 1

Die Impulsdichten (xm, ym) werden korrigiert bzgl. der Kräfte durch Druckgradienten:

$$xm(ix, iy) = xm(ix, iy) - (\gamma - 1) \cdot [\rho e(ix, iy) - \rho e(ix - 1, iy)] \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

$$ym(ix, iy) = ym(ix, iy) - (\gamma - 1) \cdot [\rho e(ix, iy) - \rho e(ix, iy - 1)] \cdot \frac{\Delta t}{\Delta y}.$$

Alle räumlichen Ableitungen sind an der Position der Impulsdichten zentriert und somit von räumlich zweiter Ordnung.

Substep 2

Beschleunigungen, hervorgerufen durch Coriolis- und Scherkräfte, werden berücksichtigt:

$$xm(ix, iy) = xm(ix, iy) + [2\bar{ym}(ix, iy) + 3\bar{\rho}(ix, iy) \cdot x(ix)] \cdot \frac{\Delta t}{Ro},$$

$$ym(ix, iy) = ym(ix, iy) - 2\bar{xm}(ix, iy) \cdot \frac{\Delta t}{Ro}.$$

Die $\bar{}$ -Größen bezeichnen Mittelwerte an den entsprechenden Positionen der Impulsdichten im Rechengitter bzw. innerhalb der Gitterzelle (vgl. Abbildung 4.1).

Substep 3

Die Impulsdichten und die innere Energiedichte werden durch die künstliche Viskosität modifiziert (vgl. 4.1.2). Der Beitrag der künstlichen Kompressionsviskosität ist:

$$xm(ix, iy) = xm(ix, iy) - [Wa3(ix, iy) - Wa3(ix - 1, iy)] \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

mit

$$Wa3(ix, iy) = \begin{cases} q \cdot \rho(ix, iy) \cdot [u(ix + 1, iy) - u(ix, iy)]^2 & \text{falls } \frac{\Delta u}{\Delta x} < 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$ym(ix, iy) = ym(ix, iy) - [Wa4(ix, iy) - Wa4(ix, iy - 1)] \cdot \frac{\Delta t}{\Delta y}$$

mit

$$Wa4(ix, iy) = \begin{cases} q \cdot \rho(ix, iy) \cdot [v(ix, iy + 1) - v(ix, iy)]^2 & \text{falls } \frac{\Delta v}{\Delta y} < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\rho e(ix, iy) = \rho e(ix, iy) - \Delta t \cdot [Wa3(ix, iy) \cdot \frac{(u(ix + 1, iy) - u(ix, iy))}{\Delta x} + Wa4(ix, iy) \cdot \frac{(v(ix, iy + 1) - v(ix, iy))}{\Delta y}].$$

Der Beitrag der künstlichen Scherviskosität ist:

$$xm(ix, iy) = xm(ix, iy) - [Wa3(ix, iy + 1) - Wa3(ix, iy)] \cdot \frac{\Delta t}{\Delta y}$$

mit

$$Wa3(ix, iy) = \begin{cases} +qs \cdot \bar{\rho}(ix, iy) \cdot [u(ix, iy) - u(ix, iy - 1)]^2 & \text{falls } \frac{\Delta u}{\Delta y} > 0 \\ -qs \cdot \bar{\rho}(ix, iy) \cdot [u(ix, iy) - u(ix, iy - 1)]^2 & \text{falls } \frac{\Delta u}{\Delta y} < 0 \end{cases}$$

und

$$ym(ix, iy) = ym(ix, iy) - [Wa4(ix + 1, iy) - Wa4(ix, iy)] \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

mit

$$Wa4(ix, iy) = \begin{cases} +qs \cdot \bar{\rho}(ix, iy) \cdot [v_t(ix, iy) - v_t(ix - 1, iy)]^2 & \text{falls } \frac{\Delta v}{\Delta x} > 0 \\ -qs \cdot \bar{\rho}(ix, iy) \cdot [v_t(ix, iy) - v_t(ix - 1, iy)]^2 & \text{falls } \frac{\Delta v}{\Delta x} < 0 \end{cases}$$

$$\rho e(ix, iy) = \rho e(ix, iy) - \Delta t \cdot [W a 3(ix, iy) \cdot \frac{(u(ix, iy) - u(ix, iy - 1))}{\Delta y} + \\ W a 4(ix, iy) \cdot \frac{(v_t(ix, iy) - v_t(ix - 1, iy))}{\Delta x}].$$

In den letzten Gleichungen sind q und q_s die künstlichen Viskositätsparameter, v_t bezeichnet den turbulenten Anteil der azimuthalen Geschwindigkeit (siehe Anmerkungen in 4.1.2). Bei den numerischen Rechnungen werden jeweils $q=1.4$ (um ein optimales Stoßverhalten zu erzielen) und $q_s=1.4$ oder $q_s=0$ benutzt. Das Vorzeichen von $W a 3$ und $W a 4$ garantiert, daß Gradienten im Geschwindigkeitsfeld ausgeglichen werden.

Substep 4

Die interne Energiedichte wird zeitlich in zweiter Ordnung korrigiert bzgl. des Kompressionsterms:

Dieses Verfahren hat sich als außerordentlich vorteilhaft herausgestellt um die Energieerhaltung zu verbessern (Norman, 1980 und Różyczka, 1985) und läßt sich folgendermaßen zusammenfassen.

$$\rho e(ix, iy) = \rho e(ix, iy) - 0.5 \Delta t \cdot [(\rho e)_n + (\rho e)_{n+1}] \cdot (\gamma - 1) \cdot \text{div}(\vec{v}).$$

Hierbei bezeichnet $(\rho e)_n$ die innere Energiedichte zum Ausgangszeitpunkt t_n und

$$(\rho e)_{n+1} = (\rho e)_n - \Delta t \cdot (\rho e)_n (\gamma - 1) \cdot \text{div}(\vec{v})$$

die vorwärts integrierte Energiedichte zum Zeitpunkt t_{n+1} . Durch diese Mittelung erfolgt die Behandlung des Kompressionsterms in der Energiegleichung in zeitlich zweiter Ordnung.

Substep 5

Dichte, innere Energie und die Impulsdichten werden durch die Advektionsterme modifiziert:

An dieser Stelle werden Terme der Form

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \text{div}(F \cdot \vec{v}) = 0 \quad (4.1)$$

behandelt. In Integralform lautet diese Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \int_V F d^3x + \oint_A (F \cdot \vec{v}) d\vec{A} = 0 \quad (4.2)$$

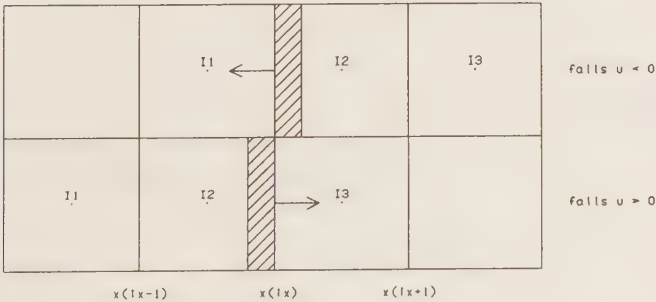
und beschreibt Änderungen von F im Volumen V hervorgerufen durch Flüsse durch die Oberfläche A .

Die Behandlung der Advektion führt unweigerlich zu numerischer Diffusion. Die Größe der Diffusion hängt davon ab wie genau Gl.(4.2) durch ein Differenzenverfahren angenähert wird. Die hier benutzte Approximation ist in räumlich zweiter Ordnung und zeitlich in erster Ordnung. Ein wesentlicher Punkt des Advektionschemas ist, daß Masse, innere Energie und Impulsdichten nicht unabhängig voneinander advektiert werden, sondern daß Massenflüsse gleichzeitig Energie und Impuls transportieren. Die Berechnung der Advektionsflüsse ist vollkommen konservativ in dem Sinne, daß die Gesamtmasse, die gesamte innere Energie und die Komponenten des Impulses der Strömung sich nicht beim Transport von einer Gitterzelle zur nächsten ändern.

Das Advektionsverfahren wird verdeutlicht anhand des radialen Massentransports in der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \tag{4.3}$$

Für die Berechnung des Massenflusses in zweiter Ordnung auf der Oberfläche einer Gitterzelle werden drei Gitterpunkte (I_1, I_2, I_3) benötigt, die sich abhängig von der Strömungsrichtung nach der in Abbildung 4.2 dargestellten Form anordnen.



Figur 4.2: Berechnung des Massenflusses auf der Oberfläche der Gitterzelle (ix, iy) .

Diese Konfiguration garantiert, daß Information nur in Strömungsrichtung transportiert wird. Die Masse in dem schraffierten Volumenelement wird im Zeitintervall Δt in die Zelle advektiert.

Das Differenzenverfahren benutzt die Monotonie-Bedingung von van Leer(1977). Dies führt dazu, daß in der Nähe scharfer Kanten in der advektierten Funktion die Terme zweiter Ordnung verschwinden und das Advektionsschema in das sog. Donor-Cell Verfahren erster Ordnung von Black und Bodenheimer(1975) übergeht. Diese Modifizierung erwies sich als außerordentlich stabilisierend in der Nähe von Stoßfronten.

Für die Berechnung des Massenflusses benötigt man die Dichte ρ_w in der Nähe der Zellwand, bzw. an der Position, die nach der Zeit $\frac{\Delta t}{2}$ die Zellwand erreicht. Allgemein gilt:

$$\rho_w = \rho(I2, iy) \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} \cdot \frac{\Delta \rho}{\Delta x}(I2) \cdot \delta x \begin{Bmatrix} falls u > 0 \\ falls u < 0 \end{Bmatrix}.$$

Zur Berechnung von $\frac{\Delta \rho}{\Delta x}$ wird das harmonische Mittel benutzt (van Leer, 1977):

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta x} = \frac{2}{(\frac{1}{\rho_+} + \frac{1}{\rho_-})}$$

mit

$$\rho_+ = \frac{(\rho(I2, iy) - \rho(I1, iy))}{\Delta x}$$

und

$$\rho_- = \frac{(\rho(I3, iy) - \rho(I2, iy))}{\Delta x}.$$

Daraus erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho}{\Delta x} &= \frac{2}{\Delta x} \cdot \left[\frac{(\rho(I2, iy) - \rho(I1, iy)) \cdot (\rho(I3, iy) - \rho(I2, iy))}{(\rho(I3, iy) - \rho(I1, iy))} \right] \\ &= \frac{2}{\Delta x} \cdot \frac{\rho_{adv}}{(\rho(I3, iy) - \rho(I1, iy))}. \end{aligned}$$

Dabei ist ρ_{adv} definiert durch:

$$\rho_{adv} := (\rho(I2, iy) - \rho(I1, iy)) \cdot (\rho(I3, iy) - \rho(I2, iy)). \quad (4.4)$$

Mit

$$\delta x = \frac{\Delta x}{2} - |u(ix, iy) \cdot \frac{\Delta t}{2}| = \frac{\Delta x}{2} \cdot (1 - |(u(ix, iy) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x})|)$$

lautet die Dichte:

$$\rho_w = \rho(I2, iy) \begin{cases} + \\ - \end{cases} \left[\frac{\rho_{adv}}{(\rho(I3, iy) - \rho(I1, iy))} \cdot (1 - |u(ix, iy) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}|) \right] \begin{cases} falls u > 0 \\ falls u < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

In der Nähe von Stoßfronten können Differenzenverfahren zweiter Ordnung zu negativen Dichten in einzelnen Gitterzellen führen. Das ist der physikalische Grund für numerische Instabilitäten. Deshalb werden in der Nähe von Kanten, d.h., falls

$$\rho_{adv} < 0, \quad (4.6)$$

die Advektionsterme zweiter Ordnung ρ_{adv} in Gl.(4.4) zu Null gesetzt, und man erhält das Donor-Cell Verfahren erster Ordnung. Dieses Verfahren erfüllt die Monotoniebedingung. Die Massenflüsse M_{fl} auf den Zellwänden berechnen sich zu:

$$M_{fl}(ix, iy) = -u(ix, iy) \cdot \Delta t \cdot \Delta y \cdot \rho_w(ix, iy). \quad (4.7)$$

Die Masse $[m(ix, iy) = \rho(ix, iy) \cdot \text{Volumen}]$ in der Gitterzelle (ix, iy) ändert sich nach der Kontinuitätsgleichung (4.2) bzgl. der Advektion in radialer Richtung durch die Massenflüsse M_{fl} an den Stellen (ix, iy) und $(ix+1, iy)$ gemäß :

$$m(ix, iy)_{n+1} = m(ix, iy)_n + [M_{fl}(ix+1, iy) - M_{fl}(ix, iy)]. \quad (4.8)$$

Analog dazu erfolgt die Advektion in azimuthaler Richtung.

Die Energiegleichung wird genau in der gleichen Form behandelt. Bei der Advektion in den Impulsgleichungen muß die Verschiebung zwischen den skalaren und vektoriellen Volumenelementen berücksichtigt werden. Dies macht eine lineare Interpolation der Massenflüsse erforderlich.

Stabilität:

Da bei den Simulationsrechnungen ein explizites Differenzenschema benutzt wird, ist der Rechenzeitschritt durch die Courant-Friedrichs-Levy Bedingung nach oben

begrenzt, gemäß :

$$\Delta t = t_{fac} \cdot \min_{\text{alle Gitterzellen}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u}{\Delta}\right)^2 + \left(\frac{v}{\Delta}\right)^2 + \left(\frac{c_s}{\Delta}\right)^2 + \left(\frac{1}{div(\vec{v})}\right)^2}} \right\} \quad (4.9)$$

Hierbei bezeichnet $\Delta = \min(\Delta x, \Delta y)$ das Minimum des Gitterabstands in radialer und azimuthaler Richtung und c_s die Schallgeschwindigkeit. Die Bedingung besagt, daß die Geschwindigkeit $\frac{\Delta}{\Delta t}$ größer sein muß als die größte in den Differentialgleichungen auftauchende Geschwindigkeit. Die Dissipationszeit $(\frac{1}{div(\vec{v})})$ erscheint wegen der künstlichen Viskosität und wird bedeutsam sobald sich Stoßfronten entwickeln. Bei den durchgeführten Rechnungen wird jeweils ein Courant-Faktor t_{fac} von 0.1 bis 0.4 gewählt.

In Abbildung 4.3 ist die Abfolge des Zeitschrittalgorithmus in einem Flußdiagramm zusammengefaßt. Der untere Index n beschreibt die physikalischen Variablen zur Zeit t_n , der obere Index bezieht sich auf die oben beschriebenen Substeps (Operator-Splitting) des Computercodes. Als Resultat erhält man nach Durchlaufen des Zeitschrittalgorithmus den hydrodynamischen Zustand des Systems zur Zeit $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

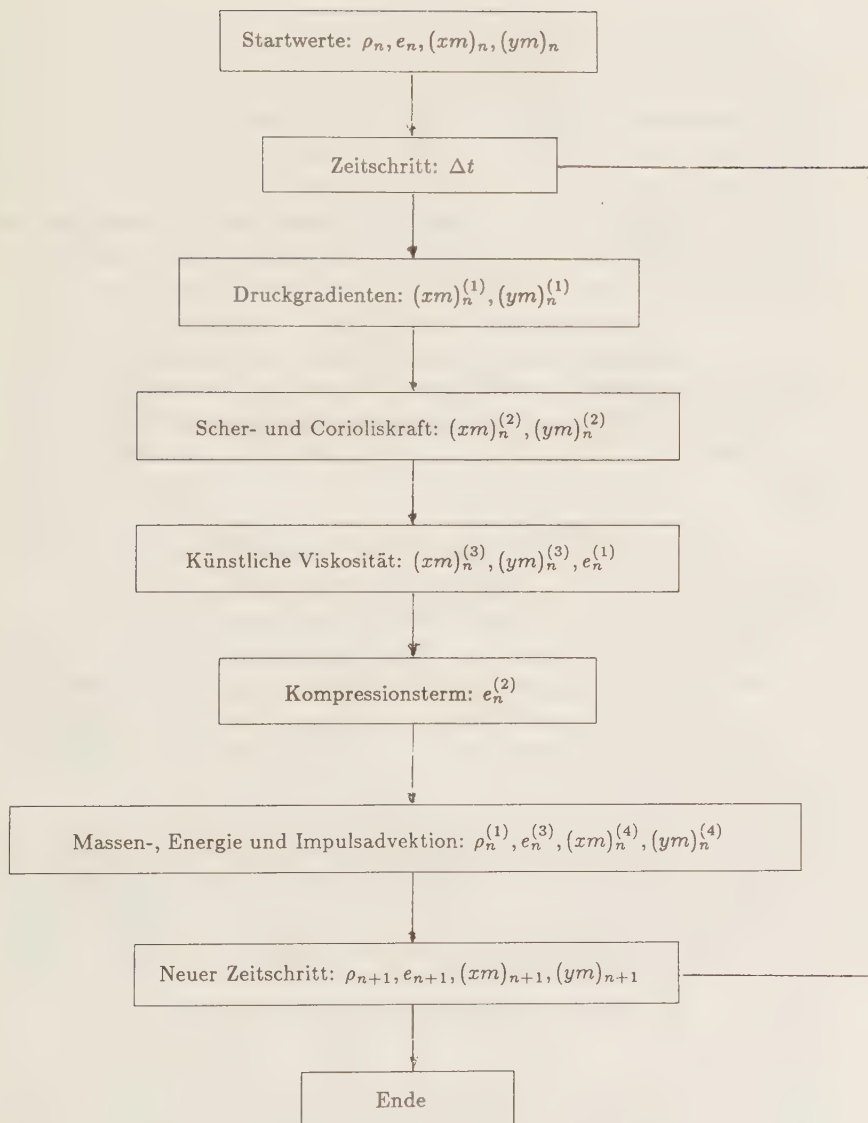


Abbildung 4.3: Der Zeitschrittalgorithmus des Computercodes

4.1.2 Die künstliche Viskosität

Stoßfronten erscheinen als Diskontinuitäten in der hydrodynamischen Approximation und erzeugen häufig Probleme in numerischen Rechnungen. Die meisten expliziten Differenzenmethoden behandeln Stoßwellen mit einem viskosen Druck, welcher die Stoßfront künstlich über einige Gitterzellen verschmiert.

In ein-dimensionalen Problemen ist die bei weitem gebräuchlichste Form des viskosen Druckes die sog. von Neuman Viskosität Q (Richtmyer und Morton(1967)):

$$Q = \begin{cases} l^2 \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 & \text{falls } \frac{\partial u}{\partial x} < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.10)$$

Dabei bezeichnet l eine Konstante von der Größenordnung des Gitterabstands.

Tscharnuter und Winkler(1979) haben die künstliche Viskosität auf mehrdimensionale Probleme erweitert und den folgenden Viskositätstensor $\underline{Q}$ vorgeschlagen:

$$\underline{Q} = \begin{cases} l^2 \rho \cdot \text{div}(\vec{v}) \cdot [(\nabla \vec{v}) - \frac{1}{3} \text{div}(\vec{v}) \cdot \underline{e}] & \text{falls } \text{div}(\vec{v}) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.11)$$

Hierbei ist $\underline{e}$ der Einheitstensor und $(\nabla \vec{v})$ der symmetrisierte Tensor der kovarianten Ableitung des Geschwindigkeitsfelds. Dieser künstliche Viskositätstensor hat die Form einer physikalischen (molekularen) Viskosität (Landau und Lifshitz(1959), Gl. 15.3) mit dem Viskositätskoeffizienten $\eta = 0.5 l^2 \rho \cdot \text{div}(\vec{v})$ und $\zeta = 0$. Tscharnuter und Winkler(1979) haben sie für sphärische Probleme benutzt, Oettl et al.(1985) für Zylinderkoordinaten.

Bei den beiden vorgeschlagenen Formen ist die künstliche Viskosität nur im Fall von Kompression ungleich Null. In dieser Arbeit wird ein künstlicher Druck vom Typ der von Neuman Viskosität benutzt. Aber neben der üblichen Kompressionsviskosität wird noch zusätzlich eine künstliche Scherviskosität eingeführt. Der Viskositätstensor wird in der folgenden Form angesetzt:

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{yx} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{pmatrix}$$

mit

$$Q_{xx} = \begin{cases} q \cdot l^2 \rho \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^2 & \text{falls } \frac{\partial u}{\partial x} < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$Q_{yy} = \begin{cases} q \cdot l^2 \rho \cdot \left[\frac{\partial v_t}{\partial y}\right]^2 & \text{falls } \frac{\partial v_t}{\partial y} < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$Q_{xy} = \begin{cases} +qs \cdot l^2 \rho \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 & \text{falls } \frac{\partial u}{\partial y} > 0 \\ -qs \cdot l^2 \rho \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 & \text{falls } \frac{\partial u}{\partial y} < 0 \end{cases},$$

$$Q_{yx} = \begin{cases} +qs \cdot l^2 \rho \cdot \left[\frac{\partial v_t}{\partial x} \right]^2 & \text{falls } \frac{\partial v_t}{\partial x} > 0 \\ -qs \cdot l^2 \rho \cdot \left[\frac{\partial v_t}{\partial x} \right]^2 & \text{falls } \frac{\partial v_t}{\partial x} < 0 \end{cases}.$$

Hierbei bezeichnen q und qs die künstlichen Viskositätsparameter. Sie bestimmen die Auflösung von Stoßfronten bzw. die Dämpfung kleinskaliger Fluktuationen in einer Scherströmung und erlauben eine getrennte Untersuchung der künstlichen Kompressions- und Scherviskosität. Bei den numerischen Rechnungen wird jeweils $q=1.4$ benutzt, was bedeutet, daß die Stoßfront über zwei Gitterzellen verschmiert wird, und $qs=1.4$ oder $qs=0$. Um die Keplerströmung von der künstlichen Viskosität weitestgehend unberührt zu lassen, werden zur Berechnung von $\underline{Q}$ nur die Gradienten im turbulenten Anteil (u, v_t) des Geschwindigkeitsfeldes benutzt. Dies wird gemacht, da man nur die kleinen Skalen dämpfen möchte ohne die großen Skalen zu beeinflussen. Weil man hier über y vernünftig mitteln kann, wird die Aufspaltung in einen turbulenten Anteil und der Keplerströmung gegenüber der einfachen Form ($v_t = v - v_{Kep}$) noch insofern verbessert, als man die mittlere Strömung ($v_t = v - \langle v \rangle_y$) in azimuthaler Richtung heranzieht. Damit wird berücksichtigt, daß im Laufe der Zeit Energie von den Fluktuationen in die Grundströmung fließen kann.

Die Bewegungsgleichungen lauten damit:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \cdot \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_0} \cdot (2\rho v + 3\rho x) - \left[\frac{\partial Q_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} \right] \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \cdot \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{R_0} \cdot 2\rho u - \left[\frac{\partial Q_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yy}}{\partial y} \right]. \quad (4.13)$$

Die Energiegleichung wird durch die von der künstlichen Viskosität erzeugten Wärme modifiziert und lautet:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \text{div}(\rho e \cdot \vec{v}) = -p \cdot \text{div}(\vec{v}) - \left[Q_{xx} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + Q_{xy} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + Q_{yz} \cdot \frac{\partial v_t}{\partial x} + Q_{yy} \cdot \frac{\partial v_t}{\partial y} \right]. \quad (4.14)$$

Der Scherterm in der künstlichen Viskosität ist relativ neu in astrophysikalischen Anwendungen. Explizite Differenzenverfahren benutzen normalerweise nur den Kompressionsanteil der numerischen Viskosität. Aber gerade in Simulationen von Turbulenz ist der Scherterm von Bedeutung. Aufgrund der endlichen Gitterauflösung

muß der Reencode die Möglichkeit haben, die hohen räumlichen Frequenzen des turbulenten Energiespektrums abzuschneiden und Dissipation in den kleinräumigen Strukturen zu simulieren. Das ist im Grunde genommen das, was normale Viskosität macht. Aber molekulare Viskosität würde die Ordnung der Differenzengleichung erhöhen, und damit das numerische Verfahren ganz erheblich erschweren. Desweiteren wirkt molekulare Viskosität nur auf Längenskalen vergleichbar mit der mittleren freien Weglänge, die wiederum weit unterhalb des Auflösungsvermögens einer numerischen Simulationsrechnung liegt. Die numerische Scherviskosität hingegen wirkt auf Längenskalen in der Größenordnung der Gittergröße und dissipiert alle kleinskaligeren Strukturen.

Testrechnungen anhand von Laborströmungen (ebene Poiseuille- und ebene Couette-Strömung, siehe 4.2) ließen die Bedeutung der künstlichen Scherviskosität erkennen. Nur mit dieser zusätzlichen Dissipation zeigen die numerischen Rechnungen ein Geschwindigkeitsfeld der turbulenten Fluktuationen, das in ausgezeichneter Weise mit den Beobachtungen übereinstimmt. Diese Testrechnungen geben uns die Gewißheit, daß diese Form der künstlichen Viskosität durchaus für die Simulation von Turbulenz geeignet ist.

4.1.3 Randbedingungen

Mit geeigneten Randbedingungen und Anfangswerten beschreibt das Gleichungssystem (2.14-2.18) vollständig das zeitliche Verhalten von turbulenten Störungen in einer Akkretionsscheibe. In dieser Arbeit werden die folgenden Randbedingungen benutzt:

a. Periodische Randbedingungen in azimuthaler Richtung:

Das bedeutet, daß für alle physikalischen Größen $f = (\rho, e, \rho u, \rho v)$ gilt:

$$f(ix, iy = 1) = f(ix, iy = NY). \quad (4.15)$$

NY bezeichnet die Anzahl der Gitterpunkte in azimuthaler Richtung.

b. Ein fester innerer Rand in radialer Richtung:

Diese Randbedingung kann die Oberfläche des kompakten Objektes oder aber die Magnetosphäre eines Neutronensterns simulieren. Vom numerischen Standpunkt bedeutet dies, daß die Normalgeschwindigkeit auf dem inneren Rand verschwindet:

$$u(ix = 1, iy) = 0. \quad (4.16)$$

Die Position des festen Randes innerhalb des Rechengitters ist an der Stelle, wo die Radialgeschwindigkeit definiert ist (siehe Abb. 4.1). Im nicht-viskosen Fall hat man Freiheit über die Azimutalgeschwindigkeit am Rand. Dies ist eine Folge der Tatsache, daß die Ordnung der Bewegungsgleichung ohne Viskosität reduziert ist. Bezieht man die künstliche Scherviskosität ein, so muß auch die turbulente Geschwindigkeitskomponente parallel zum festen Rand verschwinden, d.h., daß sich der feste Rand mit der Keplergeschwindigkeit bewegt:

$$v_t(ix = 1, iy) = 0. \quad (4.17)$$

c. Ein transmittierender äußerer Rand in radialer Richtung:

Diese Randbedingungen werden i.a. benutzt, um die Größe eines numerischen Rechengitters zu begrenzen. Innerhalb einer Akkretionsscheibe existieren überhaupt keine Ränder. Will man einen Ausschnitt aus der Scheibe numerisch simulieren, so benötigt man Randbedingungen, die die Eigenschaft haben, daß das Innere des Gitters nicht durch den Außenbereich beeinflusst wird und die sich so verhalten, daß auslaufende Wellen und Stoßfronten ohne wesentliche Reflektionen durch den Rand transmittiert werden. Im linearen Fall entspricht dieser transmittierenden Randbedingung die sog. Strahlungsbedingung, d.h., daß am nicht-reflektierenden Rand nur auslaufende Wellen zugelassen werden.

Diese Art der Randbedingungen wurden bereits bei ein-dimensionalen Problemen von Ulmschneider et al.(1977) zur Untersuchung der Ausbreitung von akustischen Wellen und der Entwicklung von Stoßfronten in der Sonnenatmosphäre benutzt und von Stefanik et al.(1984) im Zusammenhang mit nicht-linearen, zwei-dimensionalen Rechnungen bzgl. der Dynamik von Sternatmosphären.

Diese Arbeit schließt sich in den wesentlichen Punkten dem Vorgehen von Hedstrom(1979) an, der transmittierende Randbedingungen für ein-dimensionale, nicht-lineare hyperbolische Systeme abgeleitet hat. Zusätzlich werden die nicht-reflektierenden Randbedingungen auf zwei-dimensionale Simulationen von Turbulenz in Akkretionsscheiben erweitert.

Im Fall der nicht-linearen Simulationsrechnungen werden die ein-dimensionalen hydrodynamischen Grundgleichungen in radialer Richtung auf die Gleichungen entlang der sog. Charakteristiken transformiert. Eine Charakteristik eines Systems von Differentialgleichungen ist der Ort der Punkte im Raum-Zeit-Diagramm, entlang derer gewisse physikalische Parameter, die sog. charakteristischen Parameter, konstant bleiben. Im nicht-viskosen Fall erhält man eine besonders einfache Form der transformierten Gleichungen. Transmittierende bzw. nicht-reflektierende Randbedingung bedeutet, daß für einlaufende Charakteristiken keine Information von Punkten im Außenbereich ins Gitter advectiert werden darf.

Die ein-dimensionalen, nicht-viskosen, adiabatischen hydrodynamischen Gleichungen lassen sich auf folgende Form bringen (z.B. Zel'dovich and Raizer, 1968):

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u + c_s) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho c_s} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u + c_s) \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0, \quad (4.18)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u - c_s) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho c_s} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u - c_s) \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad (4.20)$$

S bedeutet die Entropie. Die erste Gleichung enthält nur Ableitungen entlang der C^+ -Charakteristik, die sich aus der Strömungsgeschwindigkeit u in radialer Richtung und der Schallgeschwindigkeit c_s ergibt und definiert ist durch $(dx/dt = u + c_s)$, die zweite nur Ableitungen entlang der C^- -Charakteristik $(dx/dt = u - c_s)$ und die dritte Gleichung nur Ableitungen entlang der C^0 -Charakteristik $(dx/dt = u)$.

Mit Hilfe der thermodynamischen Realationen

$$T \cdot dS = \frac{R}{(\gamma - 1)} \cdot dT - \frac{RT}{\rho} \cdot d\rho$$

und

$$dp = c_s^2 \cdot d\rho + \frac{\rho c_s^2}{(\gamma R)} (\gamma - 1) \cdot dS$$

(R ist die Gaskonstante und T die Temperatur) lassen sie sich folgendermaßen schreiben:

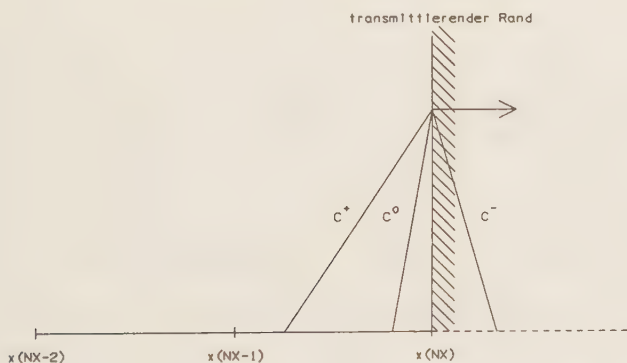
$$\frac{\gamma T}{c_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} = -(u + c_s) \cdot \left[\frac{\gamma T}{c_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad (4.21)$$

$$\frac{\gamma T}{c_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t} = -(u - c_s) \cdot \left[\frac{\gamma T}{c_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - (\gamma - 1) \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = -u \left[\frac{\partial T}{\partial x} - (\gamma - 1) \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right]. \quad (4.23)$$

Transmittierende Randbedingung bedeutet nach den o.a. Bemerkungen, daß die rechte Seite der Gl.(4.21)-(4.23) verschwindet. Diese Bedingungen gelten exakt nur für isentrope Strömungen bzw. für schwache Wellen. Die Testrechnungen müssen zeigen, in wie weit dies auch für starke Wellen und Stoßfronten gilt. Für subsonische Strömungen (in radialer Richtung hat man vermutlich keine Überschallturbulenz) muß deshalb unterschieden werden, ob zur Zeit t_n am transmittierenden Rand Ein- oder Ausströmung vorliegt.

In einem Raum-/Zeitdiagramm ergeben sich im Fall einer Ausströmung am äußeren Rand die in Abbildung 4.4 dargestellten Verhältnisse.



Figur 4.4: Verlauf der Charakteristiken bei Ausströmung am äußeren Rand.

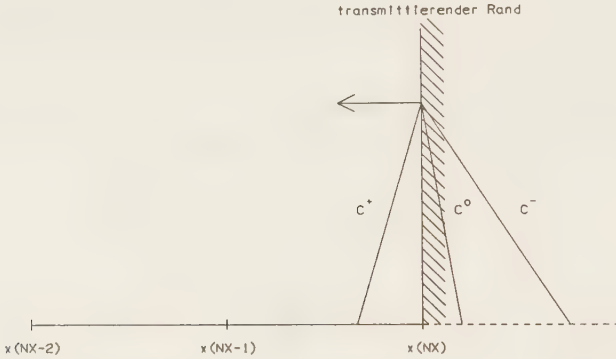
In diesem Fall können die Gleichungen (4.21) und (4.23) entlang der C^+ - und C^0 -Charakteristik integriert werden. Für die C^- -Charakteristik wird die transmittierende Randbedingung angenommen. Damit ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\frac{\gamma T}{c_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} = -(u + c_s) \cdot \left[\frac{\gamma T}{c_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad (4.24)$$

$$\frac{\gamma T}{c_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - (\gamma - 1) \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = -u \left[\frac{\partial T}{\partial x} - (\gamma - 1) \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right]. \quad (4.26)$$

Die Abbildung 4.5 zeigt die Anordnung der Charakteristiken bei Einströmung am äußeren Rand.



Figur 4.5: Verlauf der Charakteristiken bei Einströmung am äußeren Rand.

Gl.(4.21) kann entlang der C^+ -Charakteristik numerisch gelöst werden, für C^0 und C^- gelten die transmittierenden Randbedingungen. In diesem Fall erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\frac{\gamma T}{c_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} = -(u + c_s) \cdot \left[\frac{\gamma T}{c_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad (4.27)$$

$$\frac{\gamma T}{c_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - (\gamma - 1) \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.29)$$

Die Lösung der Gleichungssysteme (4.24-4.26) und (4.27-4.29) läßt sich ebenfalls unter Einbeziehung des inneren Randes folgendermaßen zusammenfassen:

$$SIGN := \begin{cases} -1 & \text{für den inneren Rand} \\ +1 & \text{für den äußeren Rand} \end{cases},$$

$$h := \begin{cases} -u \left[\frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{(\gamma-1)} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] & \text{für Ausströmung} \\ 0 & \text{für Einstömung} \end{cases},$$

$$g = -(u + SIGN \cdot c_s) \cdot \left[\frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + SIGN \cdot \frac{\gamma T}{c_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \right].$$

Mit diesen Definitionen lassen sich Dichte ρ , Radialgeschwindigkeit u und Temperatur T aus den folgenden Differentialgleichungen bestimmen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{(2\gamma T)} \cdot [g + 2h(\gamma - 1)], \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = SIGN \cdot \frac{c_s}{(2\gamma T)} \cdot g, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma} \cdot [g - 2h]. \quad (4.32)$$

Die Gleichungen (4.30 – 4.32) sind identisch mit den Gln. (4.1 – 4.3) von Hedstrom(1979) im Falle einer Einstömung am inneren Rand ($h = 0, SIGN = -1$). Die räumlichen Ableitungen werden zur Zeit t_n durch die ersten bzw. letzten beiden Stützstellen gebildet. Die Courant-Bedingung für den Zeitschritt garantiert, daß die Charakteristiken die x-Achse zwischen solchen Gitterpunkten schneiden. Mit der Zustandsgleichung läßt sich aus der Temperatur die spezifische innere Energie e berechnen. Die Temperatur wird bei dem Charakteristiken-Verfahren gewählt, da sich in dem Fall das Gleichungssystem besonders einfach darstellt.

Für die zwei-dimensionale Erweiterung müssen noch transmittierende Randbedingungen für die azimuthale Geschwindigkeitskomponente v gefunden werden. Die Bewegungsgleichung in azimuthaler Richtung (Gl. 2.16) lautet

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{R_0} \cdot 2\rho u.$$

Aufgrund der periodischen Randbedingungen können alle y -Ableitungen am radialen Rand berechnet werden. Das einzige Randproblem stellt die Advektion durch das turbulente Geschwindigkeitsfeld u in radialer Richtung dar:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v \cdot u)}{\partial x} = 0,$$

bzw.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichung besagt, daß sich die Azimutalgeschwindigkeit im Laufe der Zeit entlang der C^0 -Charakteristik nicht ändert. Wie im Fall der Radialgeschwindigkeiten muß man zwischen Ein- und Ausströmung am transmittierenden Rand unterscheiden. Bei Ausströmung schneidet die C^0 -Charakteristik zur Zeit t_n die x-Achse innerhalb des Gitters. Lineare Interpolation ergibt die Azimutalgeschwindigkeit zur Zeit $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Bei Einstromung allerdings muß eine Annahme über den Außenbereich gemacht werden. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. In dieser Arbeit wird vorausgesetzt, daß die turbulenten Fluktuationen homogen sind, und daß im zeitlichen und azimutalen Mittel am transmittierenden Rand soviel turbulenter Impuls bzw. "Reynolds-Stress" ($\langle \rho u \cdot v_t \rangle_{t,y}$) ins Gitter advektiert wird wie an den Zellen mit Ausströmung herausgeflossen ist.

Es sei N_a die Anzahl der Gitterpunkte mit Ausströmung und N_e die mit Einstromung. Dann ist

$$\frac{1}{N_a} \cdot \sum_{y(out)} (\rho u \cdot v_t(out))$$

der Mittelwert des Reynoldsstresses über alle Gitterzellen mit Ausströmung und

$$\frac{1}{N_e} \cdot \sum_{y(in)} (\rho u \cdot v_t(in))$$

der Mittelwert über alle Randwerte mit Einstromung. Die Vorstellung geht nun dahin, daß man einen Prozeß hat, der ein fluktuierendes Geschwindigkeitsfeld verursacht, das im zeitlichen und azimutalen Mittel Null ist. Wenn sich die Eigenschaften dieses Feldes (z.B. die Korrelationslänge) auch in x-Richtung nur langsam ändern, dann gibt es an einer bestimmten radialen Stelle bestimmte Symmetrien zwischen ein- und ausströmender Materie. Hier wird angenommen, daß es außerhalb des Gitters homogene Turbulenz mit einer Invarianz für Drehungen um 180° gibt. Dann folgt, daß im Mittel ein- und auströmende Gitterzellen gleichen Beitrag zum Reynoldsstress liefern. Dies gilt allerdings nur im zeitlichen und azimutalen Mittel. Die wesentliche Annahme ist nun, daß dies für jeden Zeitschritt zutrifft. Dann gilt

$$\frac{1}{N_e} \cdot \sum_{y(in)} (\rho u \cdot v_t(in)) = \frac{1}{N_a} \cdot \sum_{y(out)} (\rho u \cdot v_t(out)). \quad (4.33)$$

Der Term auf der rechten Seite von Gl. (4.33) ist vollständig bekannt, ebenso wie (ρu) auf der linken Seite, nicht aber $v_t(in)$. Auch bleibt immer noch eine gewisse Freiheit, die turbulenten Fluktuationen bei Einströmung in azimuthaler Richtung zu bestimmen, solange nur Gl.(4.33) erfüllt ist. Die einfachste Wahl ist, daß das einströmende $v_t(in)$ konstant ist. Dann gilt

$$v_t(in) = \frac{\frac{1}{N_a} \cdot \sum_{y(out)} (\rho u \cdot v_t(out))}{\frac{1}{N_e} \cdot \sum_{y(in)} (\rho \cdot u)}. \quad (4.34)$$

Damit ist die Bestimmung von v_t vollständig. Es ist vielleicht nicht die beste Möglichkeit, da man in der Festlegung von $v_t(in)$ größere Freiheit hat. Aber zumindest hat man damit eine Bedingung, die Drehimpulstransport physikalisch auf vernünftige Art und Weise möglich macht.

Testrechnungen anhand des ein-dimensionalen Shock tubes und mit der zwei-dimensionalen Ausbreitung der sog. Sedov-Lösung zeigten ein ausgezeichnetes Verhalten der transmittierenden Ränder mit restlichen Reflektionen in der Größenordnung von nur wenigen Prozent (siehe Kapitel 4.2).

Diese Ergebnisse geben uns die Gewißheit, daß derartige Randbedingungen eine geeignete Beschreibung für numerische Simulationen innerhalb einer Akkretionsscheibe darstellen.

4.2 Testrechnungen

Die Eigenschaften und die Genauigkeit des in Kapitel 4.1 entwickelten Computer-Codes wurden an einer Reihe von Testrechnungen untersucht. Das Ziel solcher Testrechnungen ist, die Größe der numerischen Diffusion des Differenzenschemas abzuschätzen, die Selbst-Konsistenz in der numerischen Formulierung der Differentialgleichungen zu überprüfen und die Reproduktion analytischer Lösungen zu zeigen. Als Testbeispiele dienten Probleme, deren analytische Lösungen bekannt sind bzw. die einen Vergleich mit anderen numerischen Simulationsrechnungen zulassen.

Darunter fällt zum einen das ein-dimensionale Shock-tube Experiment. Dieses Riemann-Problem ist seit langem bekannt und dient gleichzeitig als Test für die radialen Randbedingungen. Die sog. Sedov-Lösung beschreibt die Ausbreitung einer starken Explosion. Die Simulationsrechnungen verfolgten die Ausbreitung der Stoßfront über das zwei-dimensionale Gitter und dienten als Test für die transmitierenden Randbedingungen.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die zeitliche Entwicklung von Störungen in einer mit Keplergeschwindigkeit rotierenden Scheibe. Gleichzeitig erlaubt es der Code, auch die Stabilität von Laborströmungen zu analysieren. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Stabilität der ebenen Couette- und der ebenen Poiseuille-Strömung untersucht. Beide Strömungen sind von experimenteller und von theoretischer Seite her am intensivsten studiert und bei weitem am besten erforscht worden und können mit numerischen Stabilitätsrechnungen von Orszag und Kells(1980) verglichen werden.

4.2.1 Shock-tube Experiment oder das Riemann-Problem

Dieses Testproblem kann zeigen, wie gut das Differenzenverfahren nicht-lineare Wellen advektiert, ob Erhaltungsgrößen wirklich erhalten bleiben, wie genau der Dissipationsmechanismus in Stoßwellen, im wesentlichen also die künstliche Viskosität, die exakten Sprungbedingungen über Stoßfronten beschreibt und inwieweit die numerische Methode Diskontinuitäten (Stoßfronten und Kontaktdiskontinuitäten) auflösen kann.

Im ein-dimensionalen Riemann-Problem befindet sich heißes, dichtes Gas1 auf der linken Seite ($0 \leq x \leq 0.5$) durch eine Membran getrennt von kaltem, verdünnten

Gas2 auf der rechten Seite ($0.5 < x \leq 1.0$). Zur Zeit $t=0$ wird die Membran entfernt. Gas1 schiebt Gas2 weiter nach rechts, verursacht eine Stoßwelle, die sich durch Gas2 nach rechts bewegt und erzeugt eine Verdünnungswelle, die sich mit lokaler Schallgeschwindigkeit nach links durch Gas1 ausbreitet. Damit kann man fünf Gebiete unterscheiden. Von links nach rechts hat man ungestörtes Gas1, die Verdünnungswelle, ein Gebiet konstanten Drucks und Geschwindigkeit, welches eine Kontaktdiskontinuität aufweist, dann die Stoßfront und schließlich ungestörtes Gas2. Die analytische Lösung ist u.a. bei Courant und Friedrichs(1976) und Hawley et al.(1984a) beschrieben.

In Tabelle 4.1 sind die Anfangsbedingungen des Riemann-Problems zusammengefaßt. Die spezifische Energie e berechnet sich aus der Zustandsgleichung. Bei den Rechnungen wird ein $\gamma = 1.4$ benutzt.

Tabelle 4.1: Die Anfangsbedingungen des Riemann-Problems

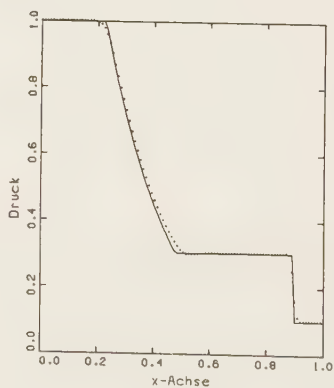
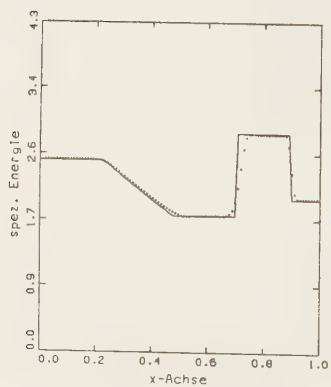
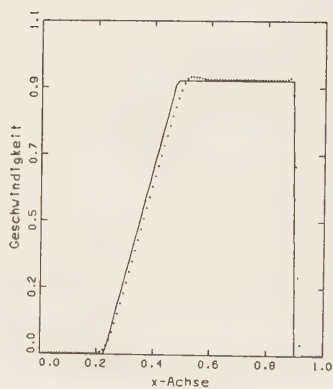
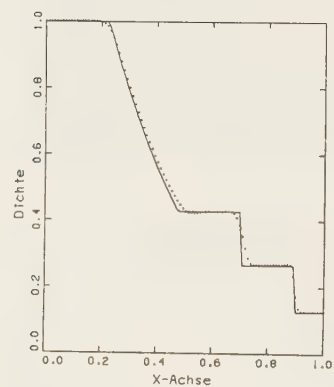
<i>Gas1</i>	<i>Gas2</i>
$\rho_1 = 1.0$	$\rho_2 = 0.125$
$p_1 = 1.0$	$p_2 = 0.1$
$e_1 = 2.5$	$e_2 = 2.0$
$u_1 = 0.0$	$u_2 = 0.0$

Die Dimension, Parameter und Anfangsbedingungen sind identisch mit denen von Sod(1978). Auf das Intervall ($0 \leq x \leq 1.0$) werden 100 Stützstellen äquidistant verteilt. Im Gegensatz zu Sod(1978) werden allerdings bei $x = 0$ und $x = 1$ transmittierende Ränder angenommen. Damit erlaubt es diese Testrechnung, einmal festzustellen, inwieweit analytische Lösungen reproduziert werden können, und zum anderen die Güte der transmittierenden Randbedingungen zu studieren.

Die Abbildung 4.6 zeigt die Druck-, Dichte-, spezifische Energie- und Geschwindigkeitsverteilung der analytischen Lösung (durchgezogene Linien) und in einem Vergleich dazu die Ergebnisse der numerischen Rechnungen (punktierter Linien) zur Zeit $t=0.213$. Die Zeitskala ist in Einheiten der isothermen Schallgeschwindigkeit.

TIME = 0.226

IMOD = 350



Figur 4.6: Analytische (durchgezogen) und numerische (punktiert) Lösung des Riemann-Problems zur Zeit $t=0.226$.

Alle endlichen Differenzenverfahren besitzen auf Grund von Rundungsfehlern numerische Diffusion, die zu einer Verschmierung von Kontaktdiskontinuitäten und Stoßfronten führt. Bei letzteren kommen zusätzlich Effekte der künstlichen Viskosität zum Tragen.

Der hier benutzte Rechencode verschmiert die Stoßfront über 3 bis 4 Gitterpunkte, die Kontaktdiskontinuität über etwa 6 Stützstellen. Die Energieverhältnisse unmittelbar hinter der Stoßfront und der Verlauf der Verdünnungswelle sind in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Im Vergleich zu gängigen Rechenverfahren (siehe z.B. Sod, 1978, Hawley et al., 1984a, Winkler et al., 1984, Norman und Winkler, 1986, Robertson und Frank, 1986, Kley und Hensler, 1987) liefert dieser Code hervorragende Resultate. Die benutzte künstliche Viskosität beschreibt exakt die Sprungbedingung über Stoßfronten, nicht-lineare Wellen werden mit nur sehr geringer numerischer Diffusion advektiert, sodaß Kontaktdiskontinuitäten und Stoßfronten gut aufgelöst werden.

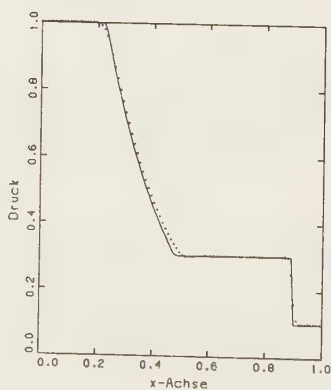
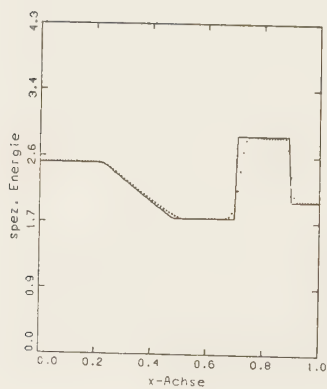
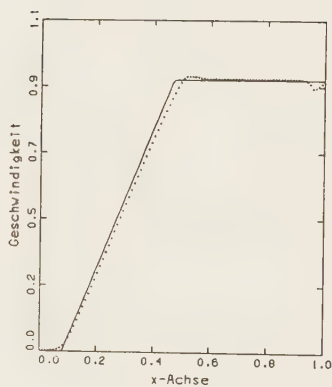
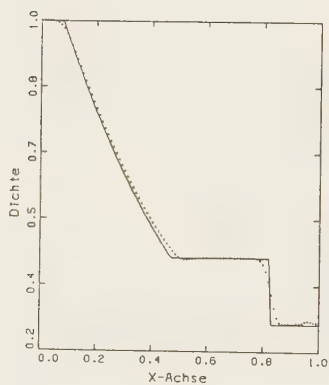
Die Abbildung 4.7 zeigt die analytische und numerische Lösung, nachdem die Stoßfront den transmittierenden Rand überschritten hat. Sehr schwache Reflektionen lassen sich beobachten, deren Amplituden in Dichte und Geschwindigkeit um einen Faktor 2 noch unter denen von Hedstrom(1979) liegen (vgl. Abbildung 3 und 4 bei Hedstrom, 1979).

In Abbildung 4.8 hat die Kontaktdiskontinuität und ein Teil der Verdünnungswelle den transmittierenden Rand passiert. Auch in diesem Fall liegen die beobachteten Reflektionen weit unter denen von Hedstrom (vgl. seine Abbildungen 5 und 6).

In Zusammenfassung läßt sich folgendes sagen. Die Ergebnisse dieser Testrechnung zeigen, daß der benutzte Rechencode die analytische Lösung des Riemann-Problems ausgezeichnet reproduziert, und daß die transmittierenden Randbedingungen sehr befriedigende Eigenschaften besitzen mit schwachen Reflektionen, die weit unterhalb der bisher erzielten Resultate liegen (siehe Hedstrom, 1979).

TIME = 0.351

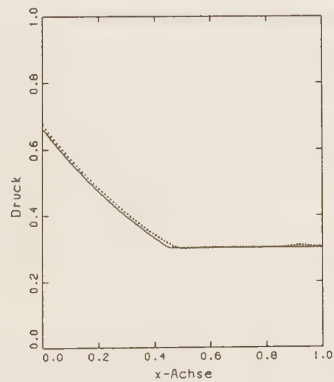
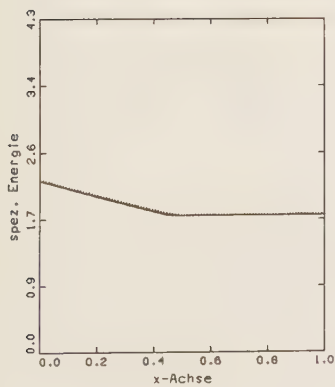
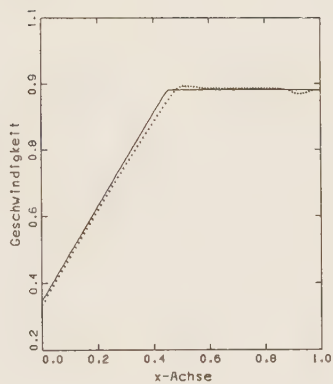
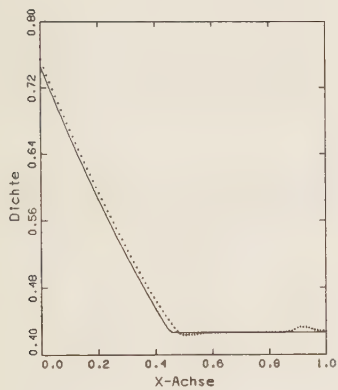
IMOD = 560



Figur 4.7: Analytische (durchgezogen) und numerische (punktiert) Lösung des Riemann-Problems zur Zeit $t=0.351$.

TIME = 0.636

IMOD = 990



Figur 4.8: Analytische (durchgezogen) und numerische (punktirt) Lösung des Riemann-Problems zur Zeit $t=0.636$.

4.2.2 Die Sedov-Lösung

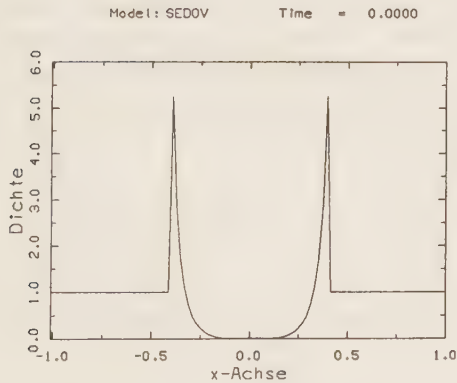
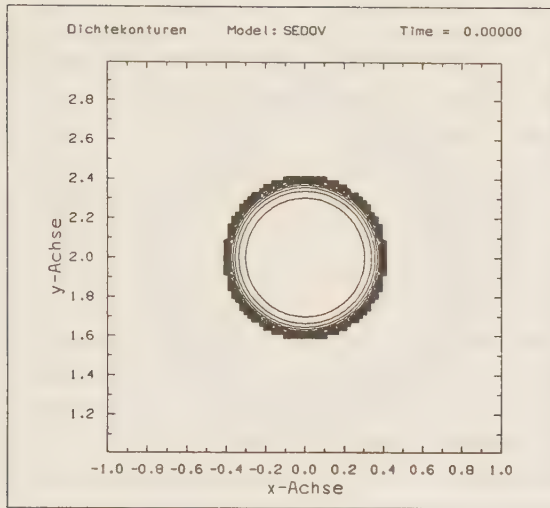
Die Sedov-Lösung beschreibt die Ausbreitung einer Stoßwelle, die von einer starken Explosion ausgelöst wird. Die Lösung dieses Problems ist vollständig bestimmt durch zwei Parameter, durch die anfängliche Dichte ρ_1 und durch die bei der Explosion erzeugten Energie E_0 . Analytische Lösungen sind bei Sedov(1959) für sphärische, zylindrische und ebene Symmetrie angegeben.

Diese Arbeit benutzt als Anfangsmodell die Sedov-Lösung in Zylindergeometrie, nachdem sich die Stoßwelle über 20 Gitterzellen ausgebreitet hat. Als Parameter werden gewählt $\rho_1 = 1$, $E_0 = 1000$ und $\gamma = 1.4$. Das Ziel der numerischen Simulation besteht darin, die zeitliche Entwicklung der Sedov-Lösung zu rechnen, zu verschiedenen Zeiten die numerische Lösung mit der analytischen zu vergleichen und das Verhalten der Stoßfronten an den transmittierenden Rändern zu studieren.

In der Abbildung 4.9 ist die analytische Sedov-Lösung dargestellt, nachdem sich die Stoßwelle über 20 Gitterpunkte ausgebreitet hat. Sie dient als Anfangsmodell der numerischen Simulationsrechnungen. Der erste Teil zeigt die Dichtekonturen. Insgesamt 12 äquidistante Höhenlinien werden dargestellt. Das Maximum und Minimum der Dichteverteilung kann man dem zweiten Teil der Abbildung entnehmen, in dem ein Schnitt bei $y = 2.0$ dargestellt ist. Bei $x = \pm 1$ befinden sich transmittierende Ränder. Da der Reencode für die zeitliche Simulation von Fluktuationen innerhalb einer Akkretionsscheibe geschrieben wurde, hat man in y-Richtung (entspricht der azimutalen Richtung) periodische Randbedingungen.

Um die Eigenschaften der transmittierenden Ränder möglichst lange zu studieren und um die Auswirkungen der periodischen Ränder zu verhindern, wird in y-Richtung die doppelte Anzahl von Längenskalen gerechnet. In x-Richtung werden über 2 Längenskalen 100 Stützstellen verteilt, in y-Richtung werden 4 Längenskalen mit derselben Auflösung gerechnet. Graphisch dargestellt wird allerdings nur ein Ausschnitt von 2×2 Längenskalen. Wegen des kartesischen Koordinatensystems ist die anfängliche Verteilung nicht vollkommen axialsymmetrisch.

In den Abbildungen 4.10 bis 4.13 ist die zeitliche Entwicklung der anfänglichen Sedov Lösung dargestellt. Bei den Dichteprofilen ist neben den numerischen Ergebnissen (punktiert) als Vergleich ebenfalls die analytische Lösung (durchgezogen) aufgetragen.



Figus 4.9: *Die analytische Sedov Lösung als Anfangsmodell*

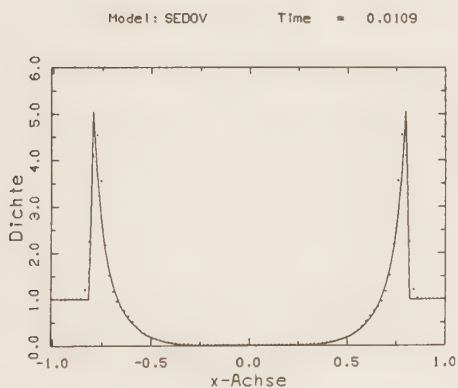
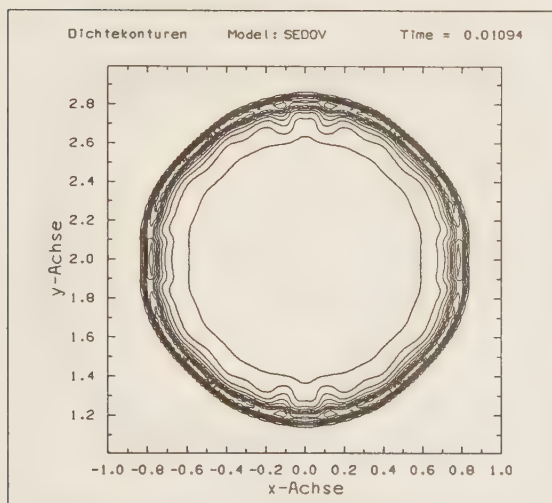
Die Abbildung 4.10 zeigt das Ergebnis zur Zeit $t = 0.01094$ kurz bevor die Stoßwelle die transmittierenden Ränder erreicht. Die Stoßfront wird über drei

Stützstellen verschmiert, in Einklang mit den Resultaten vom ein-dimensionalen Riemann-Problem (Kapitel 4.2.1). Damit liegt auch die Amplitude der Stoßwelle unterhalb der analytischen Lösung. Ansonsten reproduziert der Code ausgezeichnet die zeitliche Entwicklung des Sedov Problems.

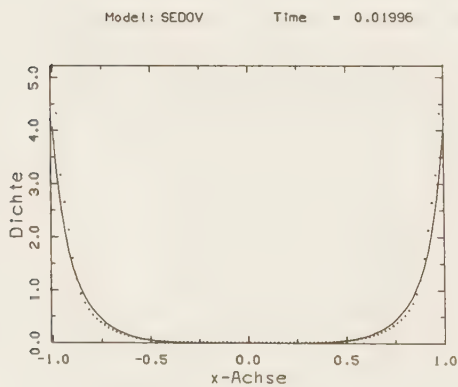
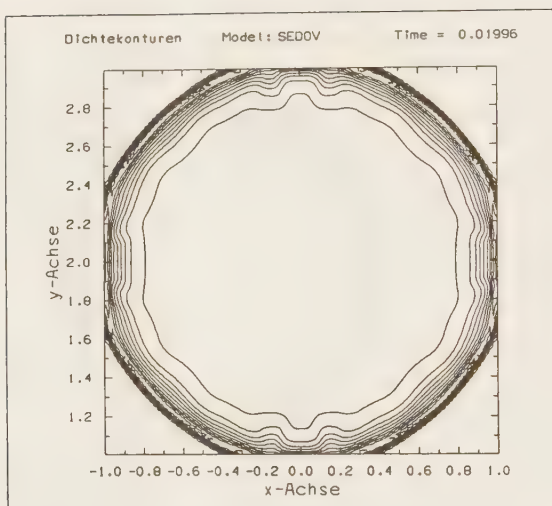
In Abbildung 4.11 ist das Ergebnis der Simulationsrechnung zur Zeit $t = 0.01996$ dargestellt, kurz nachdem die Stoßfront den transmittierenden Rand passiert hat, in Abbildung 4.12 zur Zeit $t = 0.04814$ kurz bevor die Stoßwelle den periodischen Rand bei $y = 0$ und $y = 4.0$ erreicht und in Abbildung 4.13 zur Zeit $t = 0.06662$ kurz bevor der Einfluß der periodischen Ränder bemerkbar wird.

In den Abbildungen 4.12 und 4.13 zeigen sich in den analytischen Dichteprofilen im Innern der Stoßwelle um das Explosionszentrum herum Sprünge. Diese rühren daher, daß bei der analytischen Lösung die (dimensionslose) Dichte soweit abfällt und damit die Schallgeschwindigkeit so groß wird, daß bei der numerischen Simulation der Zeitschritt gegen Null strebt. Aus diesem Grunde wird für den Innenbereich der Stoßwelle eine untere Grenze ($\rho \sim 10^{-3}$) für die Dichte festgelegt.

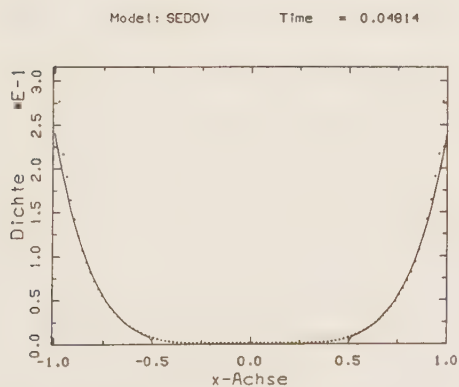
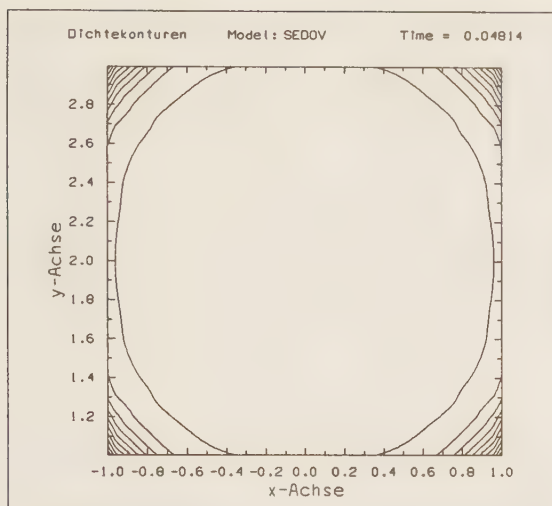
Weder in den Dichte-Konturlinien noch in den Dichteprofilen lassen sich merkliche Reflektionen an den transmittierenden Rändern feststellen. Dieses Ergebnis gab uns Vertrauen, daß diese Randbedingungen geeignet sind, die Verhältnisse innerhalb einer Akkretionsscheibe, in der es in radialer Richtung überhaupt keine Ränder gibt, sinnvoll zu beschreiben. Desweiteren zeigen die Rechnungen, daß bei der Erweiterung des von Hedstrom(1979) vorgeschlagenen Verfahrens auf zwei-dimensionale Rechnungen gleich gute Transmissionseigenschaften erzielt werden können.



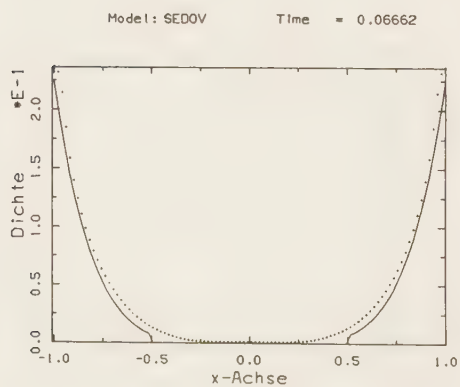
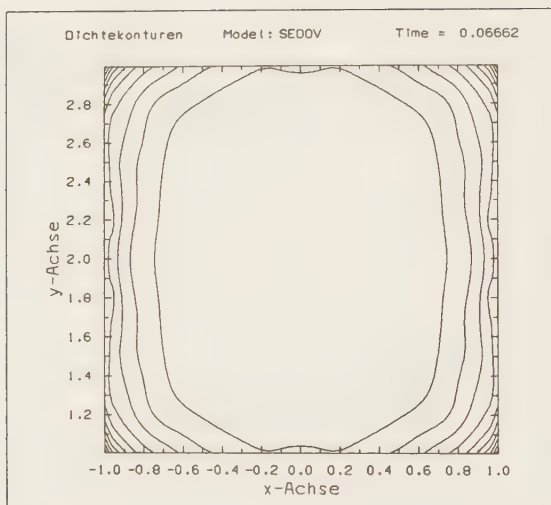
Figur 4.10: Die zeitliche Entwicklung der anfänglichen Sedov Lösung zur Zeit $t=0.01094$. Das Dichteprofil zeigt die analytische (durchgezogen) und numerische (punktiert) Lösung.



Figur 4.11: Analytische (durchgezogen) und numerische (punktiert) Rechnung der Sedov-Lösung zur Zeit $t=0.01996$



Figur 4.12: Analytische (durchgezogen) und numerische (punktiert) Rechnung der Sedov-Lösung zur Zeit $t=0.04814$



Figur 4.13: Analytische (durchgezogen) und numerische (punktiert) Rechnung der Sedov-Lösung zur Zeit $t=0.06662$

4.2.3 Stabilität der ebenen Poiseuille- und der ebenen Couette-Strömung

Bei der ebenen Poiseuille Strömung ist das ungestörte Geschwindigkeitsfeld in y-Richtung gegeben durch

$$v(x) = A_0 \cdot (1 - x^2).$$

Diese Strömung wird durch einen konstanten Druckgradienten (in y-Richtung) getrieben. Die ebene Couette Strömung wird durch die relative Bewegung der festen Ränder angeregt. Sie ändert sich linear zwischen den beiden festen Wänden und ist gegeben durch

$$v(x) = A_0 \cdot x.$$

Beide Strömungen sind durch zwei feste Ränder bei $x = \pm 1$ begrenzt und dehnen sich in y-Richtung bis ins Unendliche aus. Die feste Randbedingung bedeutet, daß die Störungsgeschwindigkeit an den festen Wänden verschwindet, bzw. daß die Strömungsgeschwindigkeit die Bewegung der Ränder annimmt. In y-Richtung werden periodische Randbedingungen angesetzt.

Ein Überblick über experimentelle und theoretische Analysen bis 1981 ist bei Drazin und Reid(1981) gegeben. Danach ergibt sich das folgende Bild. Von Labor-experimenten weiß man, daß die Poiseuille Strömung bei einer Reynoldszahl in der Größenordnung von 10^3 turbulent wird. Im Gegensatz zu den experimentellen Beobachtungen, zeigen asymptotische Untersuchungen der Orr-Sommerfeld Gleichung, daß Instabilitäten erst bei Reynoldszahlen größer als 5700 auftreten. Man vermutet, daß nicht-lineare Effekte bei endlichen Amplituden ein Anwachsen der Störungen ermöglichen unterhalb dieser kritischen Reynoldszahl. Versuche dahingehend lösen die Navier-Stokes Gleichung durch Entwicklung nach einem Funktionensystem (z.B. Fourier-Entwicklung) und beschränken die Stabilitätsanalysen gewöhnlich auf die Untersuchung der ersten harmonischen Moden (siehe z.B. Ellingsen et al., 1970 und George et al., 1974). Aus diesen Studien ergibt sich, daß zwei-dimensionale Störungen bei der ebenen Poiseuille Strömung nur bei Reynoldszahlen größer bzw. ungefähr von 2800 instabil sind. Die numerischen Simulationen von Orszag und Kells(1980) bestätigen diese Ergebnisse (siehe ebenfalls Cowley and Smith, 1985).

Orszag und Kells(1980) lösen die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen numerisch, um die Instabilität und den Übergang zur Turbulenz in der ebenen Poiseuille und Couette Strömung zu studieren. Da zwei-dimensionale, nicht-lineare Störungen

keine Anzeichen von Turbulenz erkennen lassen, konzentrieren sie sich zusätzlich auf das Studium drei-dimensionaler Effekte. Die Wechselwirkung drei-dimensionaler Moden mit zwei-dimensionalen Moden kann Geschwindigkeitsprofile erzeugen, die Inflexionspunkte bekommen und instabil werden. Die Anfangsbedingungen ihrer Rechnungen bestehen aus der ungestörten laminaren Grundströmung, welcher Eigenmoden der Orr-Sommerfeld Gleichung überlagert sind. Sie kommen zu dem Ergebnis, daß bei der ebenen Poiseuille Strömung neutrale Stabilität bei einer Reynoldszahl um 2800 erreicht wird. Während es von der Anfangsamplitude abhängige nicht-lineare, zwei-dimensionale Instabilitäten gibt, existieren offensichtlich keine explosionsartigen Instabilitäten, die kleinskalige, turbulente Strukturen bilden. Damit ist die numerische Simulation der Navier-Stokes Gleichung in Übereinstimmung mit den linearen Stabilitätsanalysen, allerdings kann kein Übergang zu Turbulenz festgestellt werden, wenn man nur zwei-dimensionale Wechselwirkung zuläßt. Ihre drei-dimensionalen Rechnungen hingegen zeigen erhebliche qualitative Unterschiede im Verhalten der Störungen. Während im zwei-dimensionalen Fall die Strömung bei Störungen endlicher Amplitude periodisch und ohne erkennbare kleinskalige Anregung bleibt, entwickelt sich im drei-dimensionalen Fall die Strömung in einen Zustand zufällig verteilter Fluktuationen, den sie als Übergang zur Turbulenz deuten. Anfängliche Störungen mit Amplituden von 5 – 10% der mittleren Strömung können den experimentell beobachteten Übergang zur Turbulenz bei Reynoldszahlen um 1000 erklären.

Alle bisherigen numerischen Studien deuten daraufhin, daß bei der ebenen Couette Strömung sämtliche linearen Moden der Orr-Sommerfeld Gleichung für alle Reynoldszahlen stabil sind, im Gegensatz zu den Laborexperimenten, bei denen Turbulenz um Reynoldszahlen ab 1000 beobachtet wird. Auch die nicht-linearen numerischen Simulationsrechnungen von Orszag und Kells(1980) zeigen signifikante Unterschiede bzgl. der Existenz und der Stärke zwei-dimensionaler Instabilitäten bei endlichen Störungen. Als Anfangsmodelle benutzen sie die am wenigsten stabilen Eigenmoden der Orr-Sommerfeld Gleichung. Allerdings zeigen alle zwei-dimensionalen numerischen Rechnungen absolute Stabilität der ebenen Couette Strömung. Die Effekte drei-dimensionaler Störungen erweisen sich als genau so dramatisch wie bei der ebenen Poiseuille Strömung. Die Simulationsrechnungen zeigen, daß die ebene Couette Strömung bei Reynoldszahlen turbulent wird, die vergleichbar sind mit den kritischen Reynoldszahlen bei der ebenen Poiseuille Strömung. Drei-dimensionale Effekte sind wesentlich für den Übergang zur Turbulenz bei Reynoldszahlen in der Größenordnung von 1000.

In dieser Arbeit wird auch die Stabilität der ebenen Couette und Poiseuille Strömung untersucht. Zu diesem Zweck wird die nicht-lineare, zeitliche Entwicklung von Eigenmoden der Orr-Sommerfeld Gleichung studiert. Unterschiede zu den numerischen Simulationen von Orszag und Kells(1980) liegen darin, daß diese Arbeit Kompressibilität berücksichtigt, während Orszag und Kells inkompressibel rechnen, und daß der hier benutzte Code keine normale (molekulare) Viskosität besitzt, allerdings künstliche Kompressions- und Scherviskosität zur Stabilisierung von Stoßfronten und zur Dämpfung von kleinskaligen Scherströmungen. Weiterhin unterscheiden sich beide Arbeiten durch die numerische Rechenmethode. Orszag und Kells(1980) benutzen ein Pseudo-Spektralverfahren (siehe dazu u.a. Gottlieb und Orszag,1977), während in dieser Arbeit die nicht-linearen hydrodynamischen Gleichungen durch ein explizites Differenzenverfahren gelöst werden (siehe Kapitel 4.1.1).

Ausgangspunkt der numerischen Rechnungen ist das Gleichungssystem (2.14 - 2.18). Die y-Geschwindigkeit v setzt sich zusammen aus der laminaren Grundströmung $v_0(x)$ und einem fluktuierenden Anteil $v_t(x, y, t)$ gemäß

$$\vec{v} = (\vec{v}_0 + \vec{v}_t) = (u(x, y, t), v_0(x) + v_t(x, y, t)).$$

Im Falle der ebenen Couette Strömung ist

$$v_0(x) = A_0 \cdot x,$$

für die Poiseuille Strömung gilt

$$v_0(x) = A_0 \cdot (1 - x^2).$$

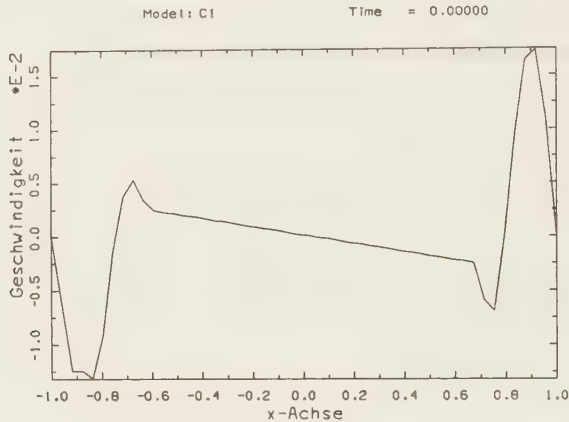
Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeitsfluktuationen in y-Richtung waren die am wenigsten stabilen Eigenmoden der Orr-Sommerfeld Gleichung. Sie wurden graphischen Darstellungen (Abbildung 1 für die ebene Poiseuille und Abbildung 8 für die Couette Strömung) von Orszag und Kells(1980) entnommen. Die Geschwindigkeitsfluktuationen in x-Richtung werden aus der Inkompressibilitätsbedingung $\text{div}(\vec{v}) = 0$ bestimmt. Weiterhin werden anfangs homogene Dichte- und innere Energieverteilung ($\rho = 1, e = 1$) angenommen.

Die Geschwindigkeitsfluktuationen in y-Richtung sind in Abbildung 4.14 für die ebene Couette Strömung dargestellt. Die Phase der anfänglichen Störung ist so

gewählt, daß das Maximum anfangs bei $y = 0$ liegt, wo auch Abbildung 4.14 entstand. Die y -Abhängigkeit ist durch Wellen der Form

$$v_t \propto e^{i\alpha y}$$

gegeben. Die Amplituden der Störungen sind in Tabelle 4.2 angegeben.



Figur 4.14: Die anfänglichen Geschwindigkeitsfluktuationen in y -Richtung in Einheiten der isothermen Schallgeschwindigkeit bei der ebenen Couette Strömung.

In Tabelle 4.2 sind die wesentlichen Parameter der gerechneten Modelle zusammengestellt.

Tabelle 4.2: Modellparameter der ebenen Couette Strömung

Modell	A_0	v_{t0}	α	$NX \times NY$	qs
C1	0.1	0.1	2	50×50	0.0
C2	0.1	0.5	2	50×50	0.0
C3	0.1	0.1	2	50×50	1.4
C4	0.1	0.1	2	50×100	0.0
C5	1.0	1.0	2	50×50	0.0
C6	1.0	1.0	2	100×100	0.0

Parameter sind die Amplitude A_0 der Couette Strömung, die Amplitude v_{t0} der anfänglichen Störungen, die Gitterauflösung und der Parameter qs für die künstliche Scherviskosität. Entsprechend dem Vorgehen von Orszag und Kells (1980) wird $\alpha = \frac{2\pi}{Y}$ konstant gehalten.

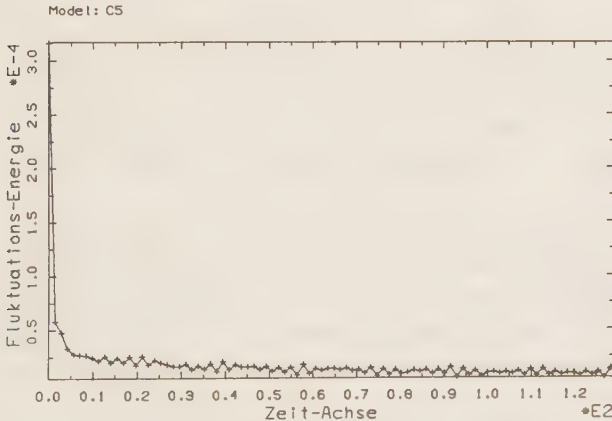
Als typisches Resultat dieser Rechnungen ist in Abbildung 4.15 die kinetische Energie der Fluktuationen pro Gitterzelle aufgetragen. Sie berechnet sich aus der Gesamtzahl der Gitterpunkte N ($N = NX \times NY$) zu

$$E_{Fl} = \frac{1}{2 \cdot N} \rho \cdot (u_t^2 + v_t^2). \quad (4.25)$$

Der fluktuierende Anteil v_t läßt sich aus der Gesamtströmung bestimmen gemäß

$$v_t = v - \bar{v}(x) = v - \frac{1}{NY-1} \cdot \sum_{iy=1}^{NY-1} v(ix, iy), \quad (4.26)$$

wobei $\bar{v}$ das mittlere Geschwindigkeitsprofil in y-Richtung darstellt. Dies muß nicht die laminare Grundströmung sein, da Energie zwischen den Fluktuationen und der Grundströmung ausgetauscht werden kann. Die Zeitskala ist in Einheiten der Laufzeit für Schallwellen.



Figur 4.15: Fluktuationsenergie pro Gitterzelle bei der ebenen Couette Strömung.

Das zeitliche Verhalten der Fluktuationsenergie zeigt anfangs einen schnellen Abfall (etwa eine Größenordnung innerhalb von 20 Zeitskalen) mit einem anschließend langsamen aber fortdauernden Abklingen. Auch alle übrigen Modelle zeigen keine Anzeichen für eine Instabilität.

Dieses Resultat steht in krassem Gegensatz zu den Ergebnissen von Laborexperimenten. Andererseits dokumentiert es ein allgemeines Problem bei der ebenen Couette Strömung. So liefern z.B. lineare Stabilitätsanalysen selbst für unendlich hohe Reynoldszahlen ausschließlich stabile Eigenmoden, und auch die zwei-dimensionalen numerischen Simulationsrechnungen von Orszag und Kells(1980) lassen keine Anzeichen von Instabilitäten erkennen.

Für dieses Verhalten der ebenen Couette Strömung kann es mehrere Ursachen geben. Zum einen handelt es sich bei dem Anfangsmodell nicht um eine instabile Eigenfunktion, als vielmehr um den am wenigsten stabilen Eigenmode der Orr-Sommerfeld Gleichung. Die Rechnungen bei der Kepler Strömung haben gezeigt (siehe Kapitel 5.1), daß die Entwicklung einer Instabilität sehr empfindlich vom Anfangsmodell abhängen kann. Desweiteren wird bei der Herleitung der Orr-Sommerfeld Gleichung die Annahme der Inkompressibilität gemacht. Auch Orszag und Kells(1980) rechnen inkompressibel. Man weiß aber, daß Kompressibilität das Spektrum instabiler Moden erweitern bzw. Instabilitäten überhaupt erst ermöglichen kann (siehe Kapitel 3.3.2 und 3.3.3). Es ist nicht auszuschließen, daß die ebene Couette Strömung in diesem Fall instabil wird. Zwar benutzt der in dieser Arbeit benutzte Rechencode Kompressibilität, aber mit den "falschen" Eigenfunktionen als Anfangsmodell.

Nach den bisherigen Studien ist es nicht ausgeschlossen, daß es nicht-lineare Instabilitäten bei der ebenen Couette Strömung gibt. Es bleibt offen, ob derartige Anfangsverteilungen bei numerischen Simulationen einen Übergang zu Turbulenz zeigen.

Wie bei den meisten Untersuchungen dieser Art, wird auch in dieser Arbeit nur der Einfluß zwei-dimensionaler Störungen studiert. Drei-dimensionale Rechnungen bieten einen weiteren Freiheitsgrad und könnten wesentlich für die Entwicklung von Turbulenz sein. Dies wird von den numerischen Simulationen von Orszag und Kells(1980) bestätigt, die nur im Fall von drei-dimensionalen Störungen Instabilitäten gefunden haben.

In Zusammenfassung kann man sagen, daß die numerische Simulation der ebenen Couette Strömung nach wie vor in Widerspruch zu den experimentellen Untersuchungen steht. Es existieren starke Diskrepanzen zwischen der nicht-linearen zeitlichen Entwicklung von Störungen und dem beobachteten Übergang zu Turbulenz.

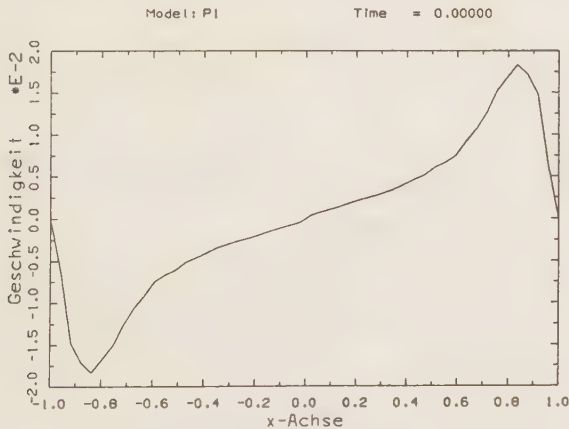
Die Modellparameter für die numerische Simulation der ebenen Poiseuille Strömung sind in Tabelle 4.3 zusammengefaßt. Die Größen haben die gleiche Bedeutung wie in Tabelle 4.2.

Tabelle 4.3: Modellparameter der ebenen Poiseuille Strömung

<i>Modell</i>	A_0	v_{t0}	α	$NX \times NY$	qs
<i>P1</i>	0.1	0.1	1.323	40×80	0.0
<i>P2</i>	0.1	0.4	1.323	40×80	0.0
<i>P3</i>	0.1	0.4	1.323	40×80	1.4

Die Modelle P1 und P2 unterscheiden sich durch die Amplitude der anfänglichen Fluktuationen, in Modell P3 wird die künstliche Scherviskosität berücksichtigt. Bei einer Amplitude der Poiseuille Strömung von $A_0 = 0.1$ hat man mit $\rho = 1, e = 1$ eine Strömung im Unterschallbereich. Dies macht einen direkten Vergleich mit Orszag und Kells(1980) möglich.

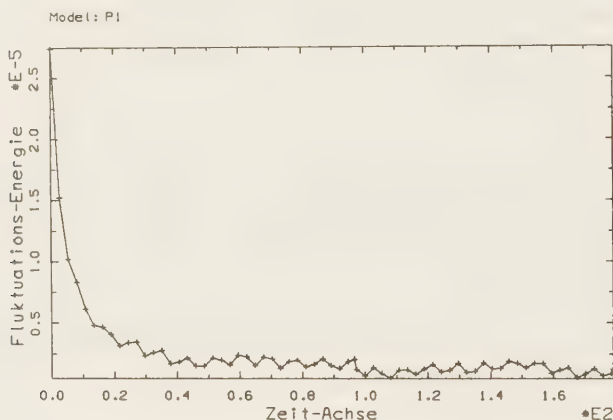
Die anfänglichen Geschwindigkeitsfluktuationen in y-Richtung sind in Abbildung 4.16 für $y=0$ dargestellt.



Figur 4.16: Die anfänglichen Geschwindigkeitsfluktuationen in y-Richtung bei der ebenen Poiseuille Strömung.

Sie wurden der Figur 8 von Orszag und Kells(1980) entnommen. Die Phase der Störungen ist wiederum so gewählt, daß das Maximum bei $y=0$ liegt. Bei allen Modellen wird $\alpha = \frac{2\pi}{Y} = 1.323$ konstant gehalten (siehe Orszag und Kells, 1980).

Der zeitliche Verlauf der Fluktuationsenergie ist für die Modelle P1 und P3 in den Abbildungen 4.17 und 4.18 dargestellt. Bei Modell P1 gibt es keine Anzeichen einer Instabilität. Die Rechnungen nach 180 Zeitskalen deuten darauf hin, daß die Fluktuationen für $t \rightarrow \infty$ vollkommen verschwinden.

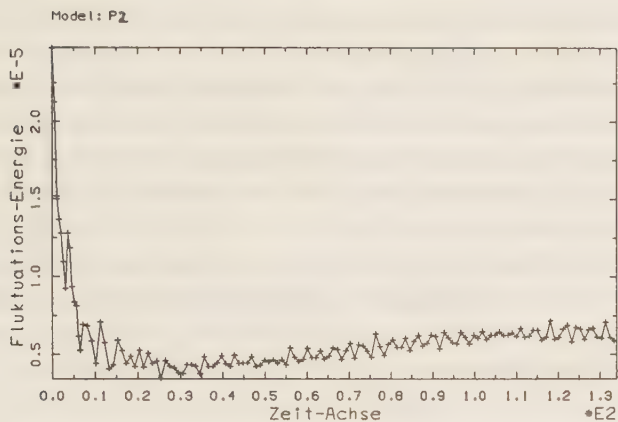


Figur 4.17: Fluktuationsenergie pro Gitterzelle bei der ebenen Poiseuille Strömung in Modell P1.

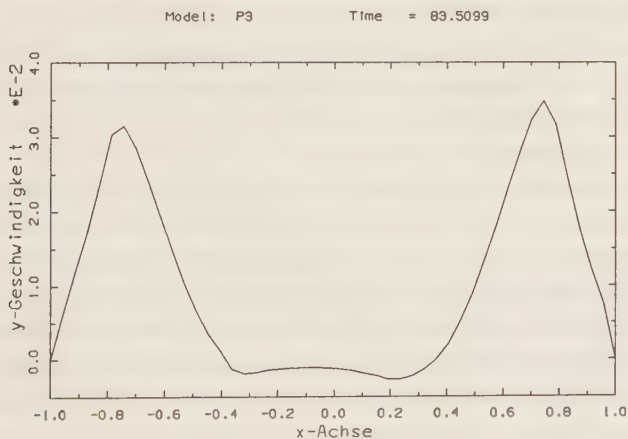
Im Gegensatz dazu beobachtet man bei Modell P2 und P3 nach etwa 30 Zeitskalen ein langsames Anwachsen der Fluktuationsenergie. Als Beispiel zeigt die Abbildung 4.18 das Verhalten bei Modell P3.

Trotz dieser offensichtlichen Instabilität gibt es keine Anzeichen für Turbulenz in dem Sinne, daß die Strömung wohl geordnet bleibt. Die Abbildung 4.19 zeigt das mittlere Profil der Geschwindigkeitsfluktuationen in y -Richtung bei Modell P3 nach $t=83.5$. Es berechnet sich nach

$$\bar{v}_t(x) = \frac{1}{NY-1} \cdot \sum_{iy=1}^{NY-1} (v(ix, iy) - v_0(ix)). \quad (4.27)$$



Figur 4.18: *Fluktuationsenergie pro Gitterzelle bei der ebenen Poiseuille Strömung in Modell P2.*



Figur 4.19: *Das mittlere Profil der Geschwindigkeitsfluktuationen in y-Richtung nach $t=83.5$.*

Die daraus resultierende Änderung der Poiseuille Strömung ist in Einklang mit den Ergebnissen von Orszag und Kells(1980) (siehe deren Abbildung 4) und steht in Übereinstimmung mit Experimenten im Labor.

Dieses Geschwindigkeitsprofil ergab sich allerdings nur dann, wenn man auch die künstliche Scherviskosität berücksichtigt (Modell P3). Dieses Ergebnis gab uns Gewißheit, daß nicht nur aus physikalischen Überlegungen heraus die Scherviskosität bedeutsam ist, sondern auch bei der numerischen Simulation von Instabilitäten und Turbulenz eine wesentliche Rolle spielt.

Die numerischen Simulationen haben gezeigt, daß bei genügend großen Störungen die ebene Poiseuille Strömung instabil wird. Im Gegensatz zu den experimentellen Beobachtungen im Labor, kann allerdings keine Entwicklung zur Turbulenz festgestellt werden. Diesen Mangel zeigen auch die numerischen Rechnungen von Orszag und Kells(1980). Ihre zwei-dimensionalen Simulationen deuten auf eine schwache Instabilität hin, einen Übergang zu Turbulenz beobachten sie allerdings erst im Fall von drei-dimensionalen Störungen.

Zusammenfassend kann man folgendes sagen. Die numerische Simulation von Turbulenz bleibt nach wie vor unbefriedigend. Bei der ebenen Couette Strömung steht sie im Falle von zwei-dimensionalen Untersuchungen in eklatantem Widerspruch zu Laborbeobachtungen. Bei der ebenen Poiseuille Strömung ist die Situation ein wenig positiver. Zwei-dimensionale numerische Rechnungen zeigen Instabilitäten, die Entwicklung von Turbulenz können aber allen Anschein nach nur drei-dimensionale Simulationen reproduzieren.

Dennoch, so glauben wir, liefert unser Rechencode vernünftige Ergebnisse. Diese stehen in Einklang mit anderen numerischen Simulationen und können im Fall der ebenen Poiseuille Strömung bereits bei zwei-dimensionalen Analysen die Entwicklung von Instabilitäten aufzeigen. Allerdings kann man nicht ausschließen, daß auch für die Keplerströmung in einer dünnen Akkretionsscheibe drei-dimensionale Effekte eine Rolle spielen. Als erster Schritt zur Untersuchung der Stabilität und der Entwicklung von Turbulenz in Akkretionsscheiben erscheinen aber zwei-dimensionale Rechnungen vollkommen gerechtfertigt, zumal derzeitige Rechenanlagen noch nicht in der Lage sind, drei-dimensionale Simulationen mit genügend großer Auflösung unter einem vertretbaren Zeitaufwand zu bewältigen.

5. Die Resultate der numerischen Simulationsrechnungen

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die numerische Simulation von hydrodynamischen Prozessen, die für die offensichtlich hohe Viskosität in Akkretionsscheiben vorgeschlagen wurden (siehe Kapitel 3). Dabei handelt es sich um die erhöhte Reibung durch turbulente Strömungen und durch die Dissipation in Stoßfronten.

In diesem Kapitel werden die Resultate der numerischen Rechnungen vorgestellt, in 5.1 in Hinblick auf die nicht-lineare Stabilitätsanalysen der Keplerströmung und der Entwicklung von Turbulenz in dünnen Akkretionsscheiben und in 5.2 bzgl. der Ausbreitung von Störungen und der Bildung von Stoßwellen innerhalb der differentiell rotierenden Scheibe.

5.1 Nicht-lineare Stabilitätsrechnungen

Voraussetzung für Turbulenz in dünnen Akkretionsscheiben ist eine Instabilität in der Keplerströmung. Der bisher einzige Hinweis auf Instabilität von der theoretischen Seite kommt von den sog. instabilen akustischen Moden, die durch Over-Reflektion an der kritischen Schicht hervorgerufen werden (siehe Kapitel 3.3.2). Allerdings beschränken sich diese Untersuchungen nur auf die lineare Stabilität. Das Auftreten einer linearen Instabilität bedeutet allerdings keinesfalls, daß Turbulenz einsetzt. Dies kann nur eine nicht-lineare Analyse entscheiden. Aber trotz dieser Beschränkung ist die lineare Theorie von Bedeutung, da sie die frühe Entwicklung infinitesimal kleiner Störungen korrekt beschreibt und da sie als Ausgangspunkt für nicht-lineare Untersuchungen dienen kann.

In diesem Kapitel wird deshalb das nicht-lineare Verhalten der in Kapitel 3.3.3 berechneten instabilen Eigenfunktionen (Kapitel 5.1.1) studiert. In Kapitel 5.1.2 wird die nicht-lineare Entwicklung von anfänglich zufällig verteilten Fluktuationen diskutiert.

5.1.1. Instabile Eigenfunktion als Anfangsmodell

Anfangsbedingungen dieser Simulationsrechnungen bildeten die in Kapitel 3.3.3 berechneten und in Tabelle 3.1 zusammengefaßten linear instabilen Eigenfunktionen.

In einem ersten Schritt der nicht-linearen Simulationsrechnungen werden die Anwachsrate für den linearen Fall untersucht. Dazu wird das zeitliche Verhalten der Fluktuationsenergie bei kleinen Machzahlen M (im mathematischen Sinne bei infinitesimal kleinen Anfangsfluktuationen) studiert. Die Machzahl ist definiert als das Maximum der anfänglichen, nicht kepler'schen Geschwindigkeitsfluktuationen dividiert durch die Schallgeschwindigkeit. Sie wird bei diesen Rechnungen mit $M = 10^{-6}$ angesetzt. Falls nicht anders erwähnt, werden alle Modelle mit $q = 1.4$, $qs = 0.0$ und mit 50×50 Gitterpunkten gerechnet.

Tabelle 5.1 faßt die Ergebnisse zusammen. Dabei bedeutet η die lineare Anwachsrate und η_n die aus den nicht-linearen Simulationsrechnungen abgeleitete Anwachsrate der Fluktuationsenergie E_{Fl} . Sie ist definiert in Einheiten der Umlauffrequenz als

$$\eta_n = \frac{1}{T} \cdot \ln \left(\frac{E_{Fl}(T)}{E_{Fl}(t=0)} \right) \tag{5.1}$$

und wird in allen folgenden Modellen jeweils nach $T = 40$ Umdrehungen bestimmt. Die Fluktuationsenergie berechnet sich nach Gl. (4.25) und (4.26) zu:

$$E_{Fl} = \frac{1}{2 \cdot N} \rho \cdot (u_t^2 + v_t^2)$$

mit

$$v_t = v - \bar{v}(x) = v - \frac{1}{NY-1} \cdot \sum_{iy=1}^{NY-1} v(ix, iy).$$

Tabelle 5.1 Anwachsrate der instabilen Eigenmoden

Modell	KEP1	KEP2	KEP3	KEP4	KEP5
η	$7.32 \cdot 10^{-3}$	$2.46 \cdot 10^{-3}$	$1.55 \cdot 10^{-3}$	$8.10 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-3}$
η_n	$6.14 \cdot 10^{-3}$	$1.93 \cdot 10^{-3}$	$0.91 \cdot 10^{-3}$	$6.86 \cdot 10^{-4}$	$6.77 \cdot 10^{-2}$

Bei den Modellen KEP1 bis KEP4 können die linearen Anwachsrate bis auf einen Faktor zwischen 1.18 und 1.70 reproduziert werden. Diese Anwachsrate sind allerdings abhängig von der Machzahl der anfänglichen Fluktuationen, von der

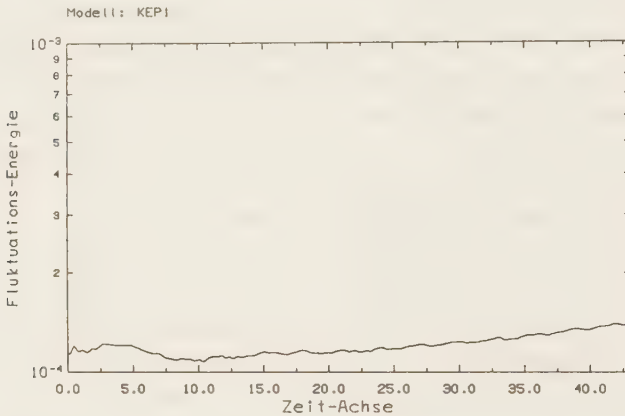
künstlichen Viskosität und von der Auflösung des numerischen Rechengitters (siehe unten).

Im Fall von zwei festen Ränder (Modell KEP5) kann man allerdings keine Übereinstimmung mit der linearen Theorie erzielen. Dies hat folgende Ursache. Die numerisch bestimmte, lineare Anwachsrate (Gl. 3.25-3.27) dieses Modells ist so klein, daß man selbst $\eta = 0$ nicht ausschließen kann. Sie wird berechnet bei fester Position der radialen Ränder und dem Korotationspunkt bei $x = 0$. Die Analyse der Eigenfunktionen (siehe unten) zeigt allerdings, daß die Korotation aufgrund der numerischen Diskretisierung nicht genau bei $x = 0$ liegt. Dies schließlich führt dazu, daß die numerischen Rechnungen nicht den neutralen Mode simulieren, als vielmehr einen völlig anderen, instabilen Mode mit einer Anwachsrate von $\eta_n = 6.77 \cdot 10^{-2}$.

In einem zweiten Schritt der numerischen Simulationsrechnungen wird die Abhängigkeit der Anwachsrate von der Machzahl der anfänglichen Fluktuationen studiert. Nach der linearen Theorie wachsen die Störungen unabhängig von der anfangs gewählten Amplitude für alle Zeiten exponentiell an. Dies ist eine Folge der Linearisierung und hat nur Gültigkeit, solange die Fluktuationen (infinitesimal) klein bleiben. Ab einer gewissen Amplitude werden nicht-lineare Effekte wichtig und falls sie stabilisierend wirken, was sie normalerweise ab einem bestimmten Punkt sind, kann das System einen oder mehrere stationäre Zustände einnehmen.

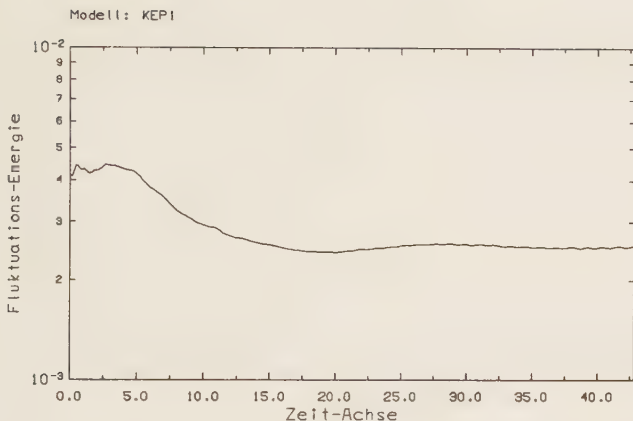
Um das nicht-lineare Verhalten zu studieren, kann man einmal die eben beschriebenen Modelle mit anfänglichen Machzahlen von $M = 10^{-6}$ weiterrechnen, bis die Amplituden soweit angewachsen sind, daß die Nicht-Linearitäten bedeutsam werden (dies erfordert allerdings ungeheuer viel Rechenzeit), oder aber man untersucht die Zeitentwicklung der instabilen Eigenmoden bei höheren anfänglichen Amplituden, d.h. bei höheren Machzahlen der Anfangsfluktuationen. Wegen der größten linearen Anwachsrate wird bei diesen numerischen Simulationen ausschließlich Modell KEP1 für den Fall eines inneren festen und eines äußeren transmittierenden Randes und Modell KEP5 für den Fall von zwei festen Randbedingungen in radialer Richtung studiert.

Die Abbildung 5.1 zeigt als Beispiel das zeitliche Verhalten der Fluktuationsenergie von Modell KEP1 bei einer Machzahl der anfänglichen Fluktuationen von $M = 10^{-1}$. Die Zeitskala ist jeweils in Einheiten der Rotationsfrequenz Ω_0 . Die Fluktuationsenergie berechnet sich nach der in den Gleichungen (4.25) und (4.26) angegebenen Vorschrift. Man erkennt, daß sich nach etwa zehn Umdrehungen eine Instabilität entwickelt mit einer Anwachsrate von $\eta = 7.48 \cdot 10^{-3}$.



Figur 5.1: Das zeitliche Verhalten der Fluktuationsenergie bei Modell KEP1 mit einer Machzahl der anfänglichen Fluktuationen von $M = 0.1$.

Die Abbildung 5.2 zeigt als weiteres Beispiel den Verlauf bei einer Machzahl von $M = 0.6$. In diesem Fall kann kein Anwachsen der turbulenten Fluktuationen beobachtet werden, vielmehr erfolgt nach ca. fünf Umdrehungen Dämpfung mit einer Rate von $\eta = -4.33 \cdot 10^{-3}$. Nach etwa 25 Umdrehungen nimmt das System einen nahezu stationären Zustand ein mit einer maximalen Machzahl der restlichen Fluktuationen von $M = 0.58$. Die mittlere Machzahl der restlichen Fluktuationen bewegt sich um $M \sim 0.1$.

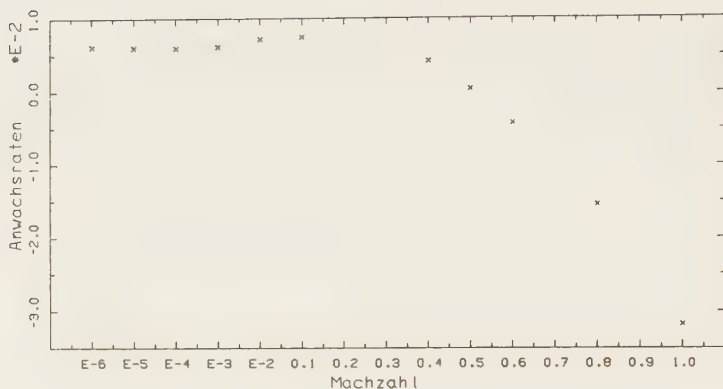


Figur 5.2: Das zeitliche Verhalten der Fluktuationsenergie bei Modell KEP1 mit einer Machzahl der anfänglichen Fluktuationen von $M = 0.6$.

In Abbildung 5.3 sind die Anwachsrate in Abhängigkeit von der Machzahl der anfänglichen Fluktuationen zusammengefaßt. Die Machzahl bewegt sich im Bereich von 10^{-6} bis 0.1 in Zehnerpotenzen. Das Maximum bei den numerisch simulierten Modellen liegt bei $M = 1$, was Fluktuationen mit Schallgeschwindigkeit entspricht. Die Anwachsrate sind für Machzahlen im Bereich von

$$10^{-6} \leq M \leq 10^{-3}$$

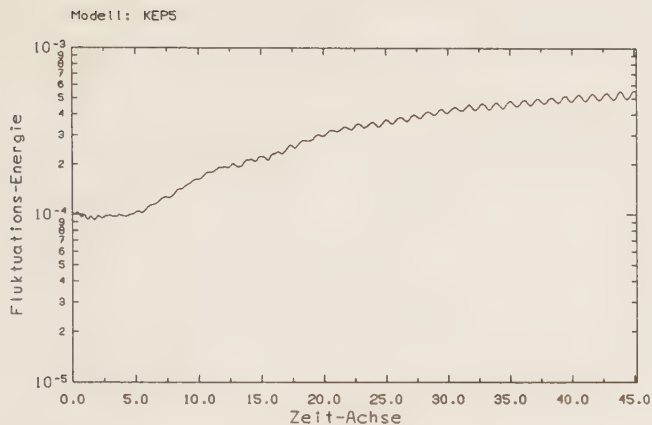
nahezu konstant und liegen um etwa 10^{-3} und damit um ca. 16% unter den von der linearen Theorie vorausgesagtem Wert von $7.32 \cdot 10^{-3}$. Positive Anwachsrate werden für $M \leq 0.5$ erzielt. Bei noch größeren Machzahlen kann kein Anwachsen der anfänglichen Fluktuationen mehr beobachtet werden.



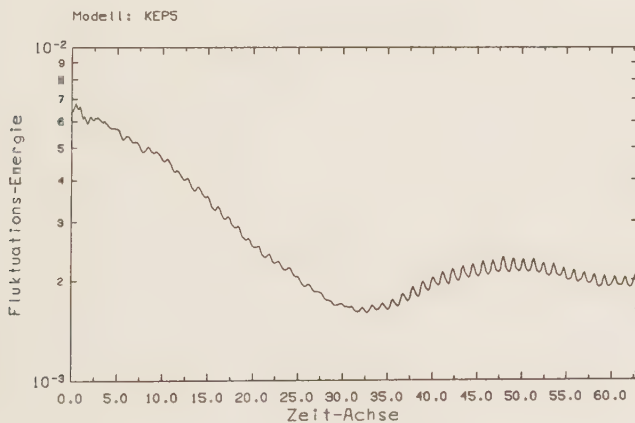
Figur 5.3: Die Anwachsrate als Funktion der Machzahl M der anfänglichen Fluktuationen bei einem inneren festen und einem äußeren transmittierenden Rand.

Bei all diesen gedämpften Lösungen stellt sich nach 15 bis 25 Umdrehungen ein fast stationärer Endzustand ein mit einer Machzahl der restlichen Geschwindigkeitsfluktuationen in dem Bereich von $M = 0.5$ bis 0.6 . Bei $M = 0.1$ liegt mit $\eta = 7.48 \cdot 10^{-3}$ ein Maximum. Das konstante Verhalten für sehr kleine Machzahlen deutet darauf hin, daß man im Bereich des linearen Anwachsens ist. Die aus den numerischen Simulationen abgeleiteten Anwachsrate für die Modelle KEP1 bis KEP5 sind in der Tabelle 5.1 angegeben. Sie werden jeweils bei anfänglichen Fluktuationen mit $M = 10^{-6}$ berechnet. Man erkennt, daß bei allen Modellen die linearen Anwachsrate bis auf einen Faktor von 1.1 bis 1.7 reproduziert werden können.

Das Verhalten bei festen inneren und äußeren Randbedingungen zeigt qualitativ genau das gleiche Verhalten. Die Anwachsrate liegen um eine Größenordnung höher und bestätigen damit die Voraussagen der linearen Stabilitätsanalysen von Narayan et al.(1987). Sie haben gezeigt, daß bei zwei festen Rändern Instabilitäten nur dann auftreten, wenn für beide Resonanzräume zwischen den Rändern und der korotierenden Schicht geeignete Phasenbedingungen gelten, sodaß konstruktive Interferenz auftreten kann. Die Abbildung 5.4 zeigt die zeitliche Entwicklung der Fluktuationsenergie von Modell KEP5 bei einer anfänglichen Machzahl von $M = 0.1$, die Abbildung 5.5 bei $M = 0.8$.

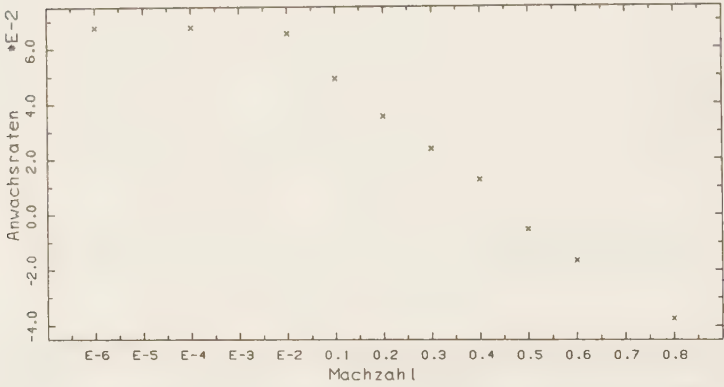


Figur 5.4: Das zeitliche Verhalten der Fluktuationsenergie bei Modell KEP5 mit einer Machzahl der anfänglichen Fluktuationen von $M = 0.1$.



Figur 5.5: Das zeitliche Verhalten der Fluktuationsenergie bei Modell KEP5 mit einer Machzahl der anfänglichen Fluktuationen von $M = 0.8$.

Die Anwachsraten in Abhängigkeit der Machzahl der anfänglichen Störung sind in Abbildung 5.6 dargestellt.



Figur 5.6: Die Anwachsraten als Funktion der Machzahl der anfänglichen Störung bei festen inneren und äußeren Randbedingungen.

Die konstante Anwachsraten bei sehr kleinen Machzahlen deutet wiederum auf den linearen Bereich hin. Auch bei zwei festen Rändern findet man instabile Lösungen nur bei Machzahlen kleiner als 0.5.

Die Abhängigkeit der Anwachsraten von der künstlichen Viskosität und der Auflösung ist am Beispiel des Modells KEP5 mit einer Machzahl von 0.1 und zwei festen Rändern in Tabelle 5.2 dargestellt. Das Modell KEP5 wird mit $q = 1.4$, $qs = 0.0$ und mit 50×50 Gitterpunkten berechnet.

Tabelle 5.2 Die Abhängigkeit der Anwachsraten von der künstlichen Viskosität und der Auflösung

KEP5	$q = 0$	$qs = 1.4$	100×100
$4.92 \cdot 10^{-2}$	$7.36 \cdot 10^{-2}$	$3.38 \cdot 10^{-2}$	$7.89 \cdot 10^{-2}$

Wie zu erwarten hängen die Anwachsrate etwas von der künstlichen Viskosität ab. Hinzunahme der künstlichen Scherviskosität mit einem Faktor von $q_s=1.4$ führt zu einer Erniedrigung um fast 31%. Die Rechnungen mit den instabilen Eigenfunktionen als Startmodelle ließen selbst Simulationsrechnungen ohne jegliche künstliche Viskosität zu. Auch nach vierzig Umdrehungen zeigten sich noch keine Anzeichen von numerischen Instabilitäten. Die Anwachsrate liegt im Vergleich zu den Rechnungen mit $q=1.4$ um einen Faktor 1.5 höher. Das doppelte Auflösungsvermögen zeigt eine um 1.46 höhere Anwachsrate.

Die bisherigen Untersuchungen sollten zeigen, inwieweit die Nicht-Linearität der hydrodynamischen Gleichungen die Anwachsrate der linear instabilen Eigenmoden im Laufe der Zeit modifiziert. Im nächsten Schritt soll der Einfluß auf die Eigenfunktionen studiert werden. Nach der linearen Theorie erwartet man, daß sie sich in dem gewählten Bezugssystem stationär verhalten, allerdings mit exponentiell anwachsenden Amplituden.

Die Analyse der Eigenfunktionen anhand der nicht-linearen Simulationsrechnungen zeigte, daß die zeitliche Entwicklung der räumlichen Verteilung von Dichte, Energie und Geschwindigkeit eine systematische Verschiebung in azimuthaler Richtung aufweist. Diese kontinuierliche Bewegung hängt sehr stark von der gewählten Auflösung in dem Sinne ab, daß sie bei Rechnungen mit hoher Auflösung (100×100) drastisch abnimmt. Dies deutet darauf hin, daß aufgrund der numerischen Diskretisierung der Korotationspunkt nicht genau bei $x = 0$ liegt.

Dies läßt sich folgendermaßen verstehen. Die in Kapitel 3.3.3 abgeleiteten instabilen Moden berechnen sich numerisch aus dem in Gl.3.25 angegebenen Randwertproblem, das als Lösung eines komplexen ω angesehen werden muß. Allerdings hat man bei der Berechnung die Freiheit des Bezugssystems. Aus linearen Stabilitätsuntersuchungen weiß man (siehe Kapitel 3.3.2), daß für die Entwicklung von Instabilitäten notwendig ist, daß sich die korotierende Schicht innerhalb der Strömung befindet. Dies legt nahe ein Bezugssystem zu wählen, das sich mit dem Korotationspunkt mitbewegt, d.h. in dem der Eigenmode stationär ($\Re(\omega) = 0$) ist. Durch das numerische Rechenverfahren werden diese Moden allerdings nur mehr oder weniger genau approximiert. Für die nicht-linearen Simulationsrechnungen werden diese Anfangsmodelle schließlich noch auf ein äquidistantes Gitter linear interpoliert. Dadurch ergeben sich zusätzliche Ungenauigkeiten, die den Korotationspunkt verschieben können, somit ein $\Re(\omega) \neq 0$ liefern und damit zu einer systematischen Rotation der Dichteverteilung führen können.

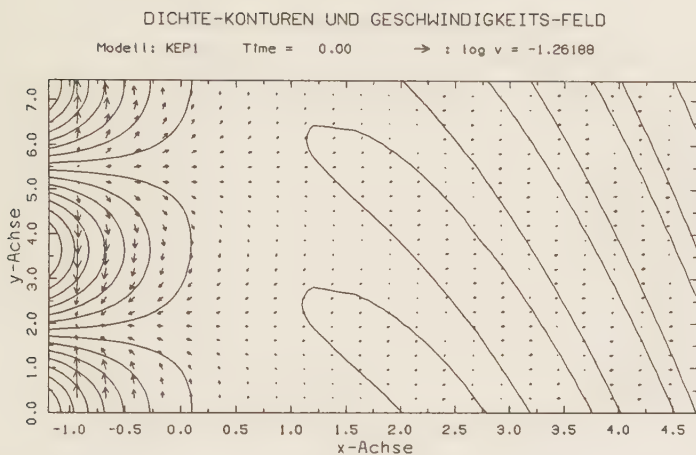
Bei den verschiedenen Modellen kann man diese systematische Bewegung eliminieren, wenn man den Koordinatenursprung bei KEP1 nach $x_c = 0.114$ und bei Modell KEP5 nach $x_c = 0.149$ verschiebt.

Die Abbildung 5.7 zeigt das Verhalten der Dichtefluktuationen und des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes zu verschiedenen Zeiten relativ zu dieser systematischen Bewegung für das Modell KEP1 bei einer Machzahl der anfänglichen Fluktuationen von $M = 0.1$. In Abbildung 5.8 sind die Verhältnisse bei einer Machzahl von $M = 0.6$ dargestellt. Bei den Dichtekonturen werden 16 äquidistante Höhenlinien berechnet. Das Maximum (ρ_{max}) und Minimum (ρ_{min}) der Dichteverteilung ist bei jeder Darstellung angegeben. Das Dichtemaximum liegt jeweils bei $y=3.79$.

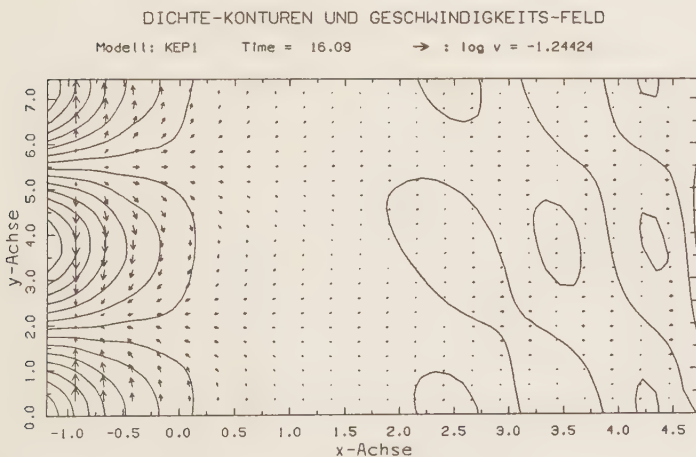
In Abb. 5.7 ist das typische Verhalten für die instabilen Modelle dargestellt. Die Dichtefluktuationen zeigen auch bei den nicht-linearen Rechnungen einen Verlauf wie man ihn nach der linearen Theorie erwartet. Die anfängliche Verteilung bleibt räumlich nahezu erhalten, nur die Amplituden wachsen im Laufe der Zeit. Die numerischen Simulationsrechnungen zeigen keine Anzeichen für die Bildung von Stoßfronten (siehe Näheres unten).

Die Abbildung 5.8 zeigt die typische Dichtestruktur bei allen gedämpften Lösungen. Hier kann man einen größeren Einfluß der nicht-linearen Wechselwirkung erkennen. Während des Abfalls der Fluktuationsenergie (Abbildung 5.8a) kann man größere Gradienten und eine Asymmetrie der Dichte in azimuthaler Richtung für $x < 0$ beobachten. Zu späteren Zeiten verschwinden diese Merkmale und die Struktur der Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung in dem stationären Bereich (Abbildung 5.8b und 5.8c) ähnelt sehr stark der Anfangssituation.

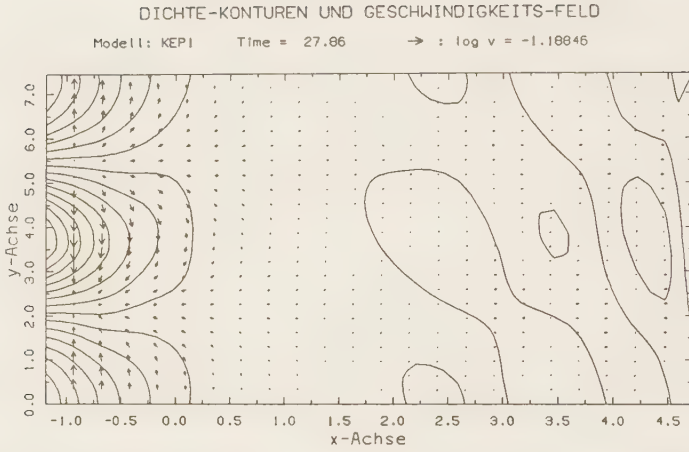
Die Abbildungen 5.9 und 5.10 zeigen die zeitliche Entwicklung der Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen bei Modell KEP5 für $M = 0.1$ und $M = 0.8$. Bei diesen Modellen hat man zwei feste Ränder in radialer Richtung. Man erkennt im wesentlichen das gleiche Verhalten wie bei den Modellen mit einem inneren festen und einem äußeren transmittierenden Rand (vgl. die Abbildung 5.9 mit 5.7 und die Abbildung 5.10 mit 5.8). Das bedeutet, daß im Fall des Anwachsens der Fluktuationsenergie ($M = 0.1$) die anfängliche Verteilung kaum den Einfluß nicht-linearer Terme spürt und räumlich nahezu unverändert bleibt. Dem gegenüber zeigen sich im gedämpften Fall ($M = 0.8$) die gleichen Merkmale wie bei Modell KEP1.



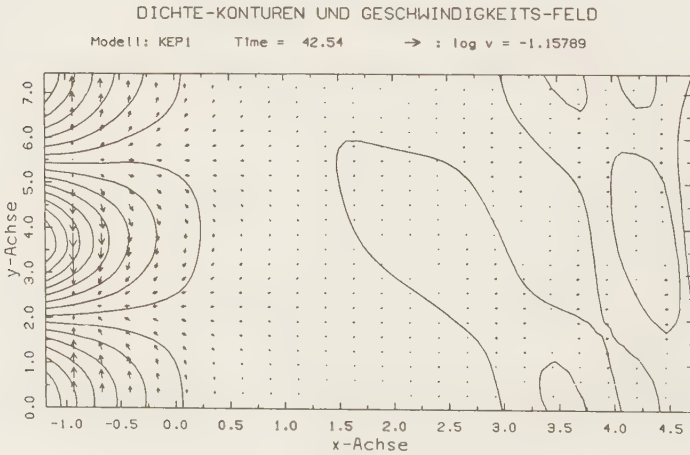
Figur 5.7a: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=0.0$ bei Modell KEP1 mit $z_m = 0.1$; ($\rho_{min} = 0.93, \rho_{max} = 1.07$).



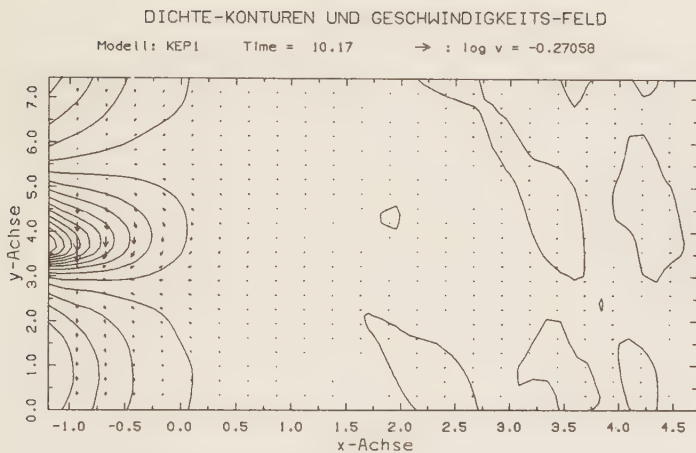
Figur 5.7b: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=16.09$ bei Modell KEP1 mit $z_m = 0.1$; ($\rho_{min} = 0.93, \rho_{max} = 1.08$).



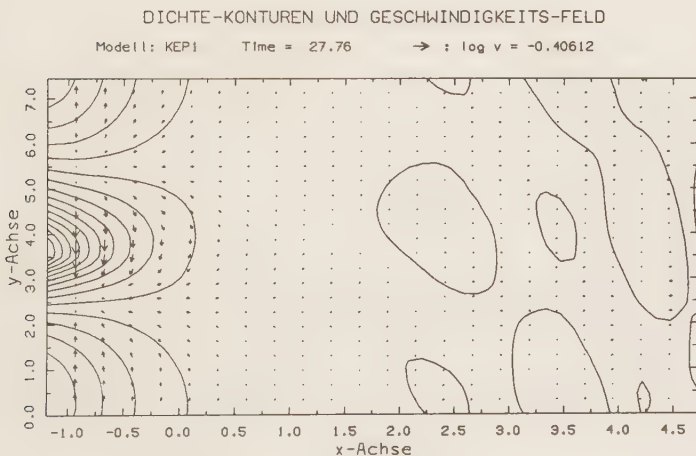
Figur 5.7c: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=27.86$ bei Modell KEP1 mit $z_m = 0.1$; ($\rho_{min} = 0.93, \rho_{max} = 1.09$).



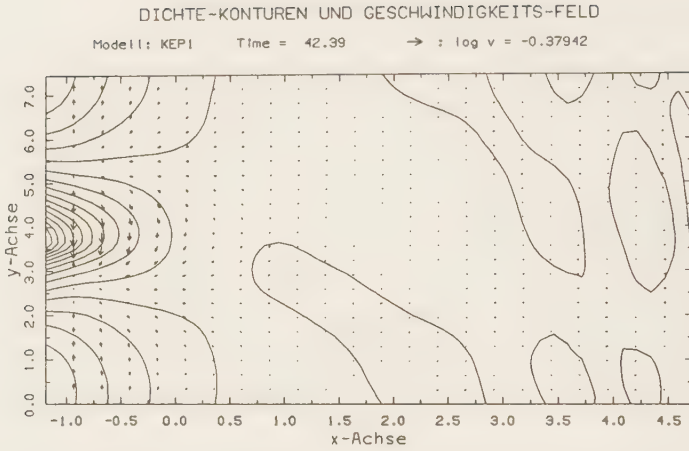
Figur 5.7d: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=42.54$ bei Modell KEP1 mit $z_m = 0.1$; ($\rho_{min} = 0.92, \rho_{max} = 1.10$).



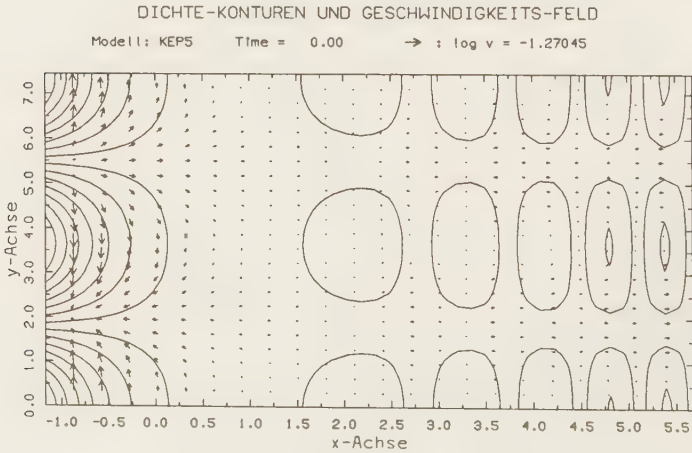
Figur 5.8a: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=10.17$ bei Modell KEP1 mit $z_m = 0.6$; ($\rho_{min} = 0.78, \rho_{max} = 1.82$).



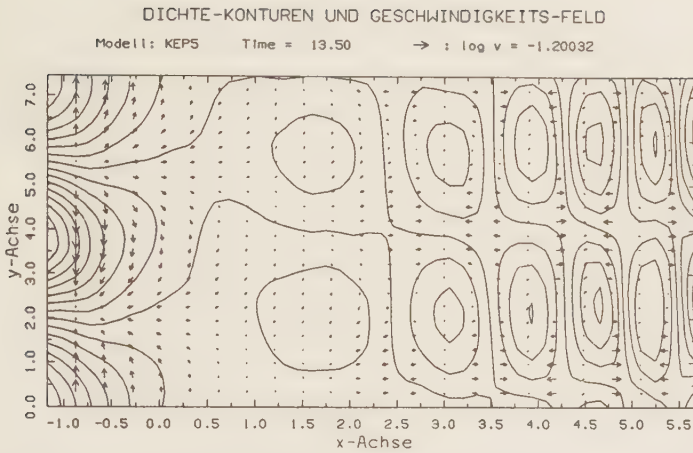
Figur 5.8b: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=27.76$ bei Modell KEP1 mit $z_m = 0.6$; ($\rho_{min} = 0.75, \rho_{max} = 1.58$).



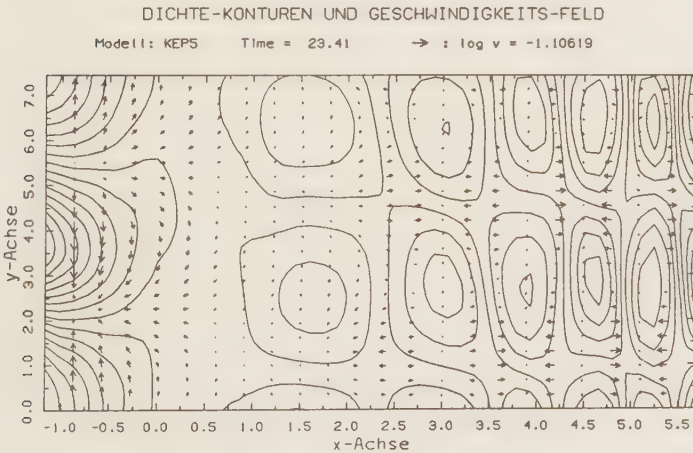
Figur 5.8c: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=42.39$ bei Modell KEP1 mit $z_m = 0.6$; ($\rho_{min} = 0.76, \rho_{max} = 1.62$).



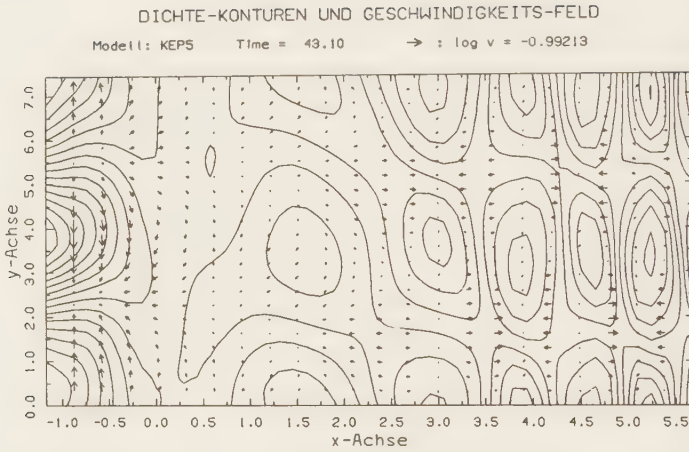
Figur 5.9a: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=0.0$ bei Modell KEP5 mit $z_m = 0.1$; ($\rho_{min} = 0.93, \rho_{max} = 1.07$).



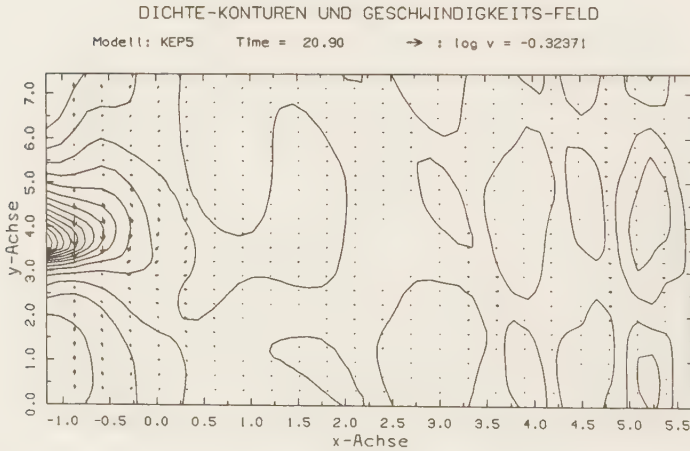
Figur 5.9b: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=13.50$ bei Modell KEP5 mit $z_m = 0.1$; ($\rho_{min} = 0.93, \rho_{max} = 1.09$).



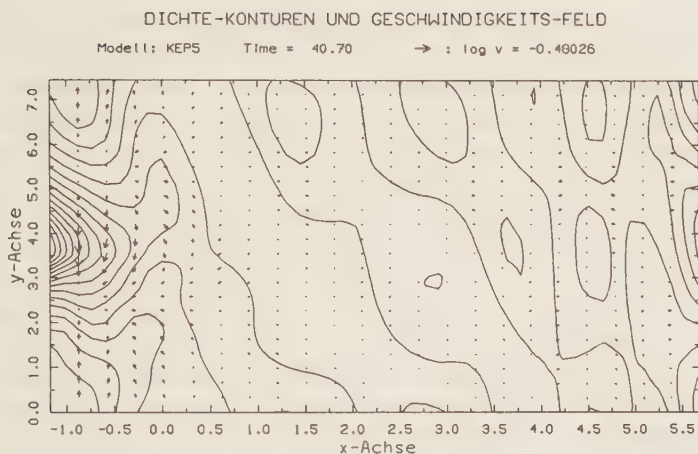
Figur 5.9c: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=23.41$ bei Modell KEP5 mit $z_m = 0.1$; ($\rho_{min} = 0.91, \rho_{max} = 1.11$).



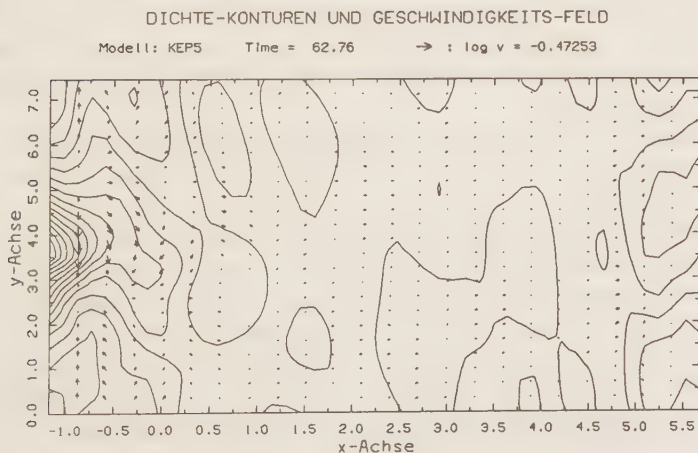
Figur 5.9d: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=43.10$ bei Modell KEP5 mit $z_m = 0.1$; ($\rho_{min} = 0.90, \rho_{max} = 1.13$).



Figur 5.10a: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=20.90$ bei Modell KEP5 mit $z_m = 0.8$; ($\rho_{min} = 0.83, \rho_{max} = 1.62$).



Figur 5.10b: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=40.70$ bei Modell KEP5 mit $z_m = 0.8$; ($\rho_{min} = 0.82, \rho_{max} = 1.50$).



Figur 5.10c: Dichte- und Geschwindigkeitsfluktuationen zur Zeit $t=62.76$ bei Modell KEP5 mit $z_m = 0.8$; ($\rho_{min} = 0.80, \rho_{max} = 1.50$).

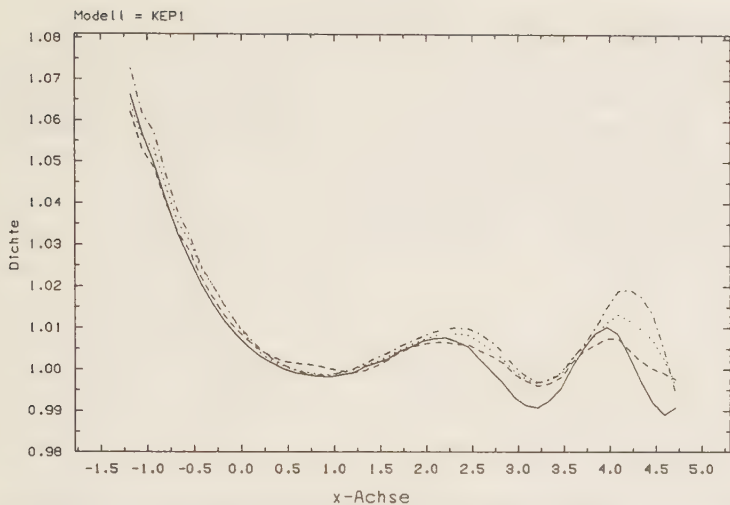
Die numerischen Simulationsrechnungen haben gezeigt, daß man anwachsende Lösungen nur für Machzahlen der anfänglichen Fluktuationen von $M < 0.5$ erhält. Bei anfänglich größeren Geschwindigkeitsfluktuationen stellt man ein Abklingen und einen Übergang zu einem stationären Zustand fest mit einer Machzahl ebenfalls in der Größenordnung von 0.5. Beides deutet darauf hin, daß das System bei dieser Amplitude der Störungen einen Sättigungszustand erreicht.

I.a. führen die Nichtlinearitäten zumindest ab einem gewissen Zeitpunkt zu einer Sättigung des Systems. Diese Sättigung kann zum einen dadurch hervorgerufen werden, daß die nicht-linearen Terme die Phasenbeziehungen zwischen den fluktuierenden Geschwindigkeiten so verschieben, daß ein weiteres Anwachsen der Störungen nicht mehr möglich ist. Da die Anwachsrate sehr klein sind, könnten dazu bereits geringfügige Verschiebungen genügen. Zum anderen kann eine Sättigung dadurch erreicht werden, daß sich die Fluktuationen durch die Nichtlinearitäten aufsteilen und Stoßfronten bilden. Wegen der kleinen Anwachsrate brauchen diese Stöße nur sehr schwach zu sein. In diesem Fall entspricht dem Sättigungszustand ein Gleichgewicht zwischen dem Anwachsen der Instabilität und der erhöhten Dissipation in den Stoßwellen.

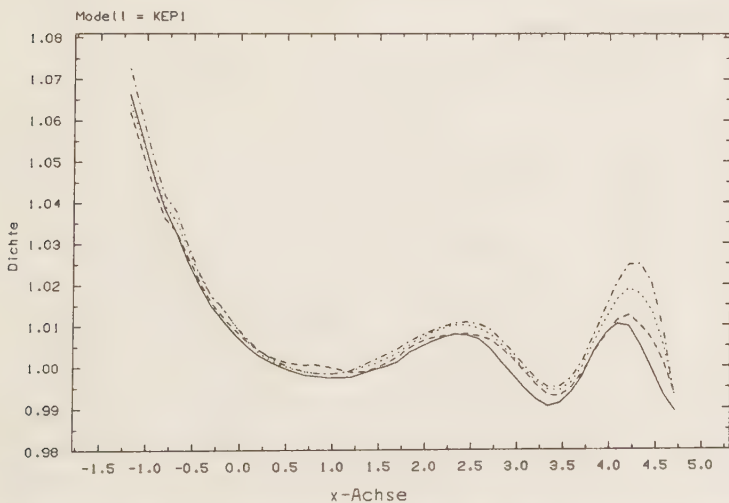
Schwache Stoßwellen sind innerhalb eines Wellenprofils (Dichteprofil) nur schwer erkennbar. Eine quantitative Feststellung, ob die Neigung zur Sättigung durch Stöße vorhanden ist, kann dadurch gemacht werden, daß die Dissipation durch die künstliche (Kompressions-) Viskosität gemessen wird. Die Testrechnungen in Kapitel 4.2.1 und 4.2.2 haben gezeigt, daß die künstliche Viskosität exakt die Sprungbedingungen über Stoßfronten beschreibt und damit ein zuverlässiges Maß für die Dämpfung in Stoßfronten ist.

Damit könnte die Untersuchung der Wellenprofile und/oder der Dissipationszeitskala der künstlichen Viskosität Auskunft darüber geben, welcher nicht-lineare Sättigungseffekt wirksam ist.

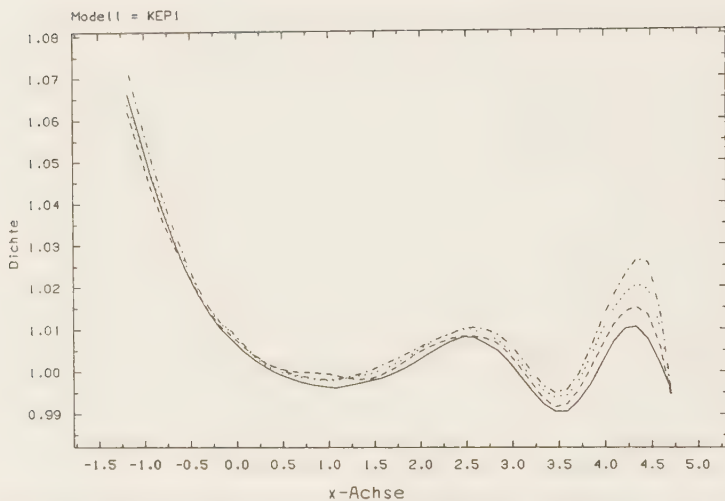
Die Abbildung 5.11 zeigt radiale Dichteprofile zu verschiedenen Zeiten, die Abbildungen a-d unterscheiden sich durch verschiedene Anfangs- und Endpunkte in azimuthaler Richtung. Von den Testrechnungen in Kapitel 4.2 weiß man, daß Stoßwellen über etwa drei Gitterzellen verschmiert werden. Bei einer Auflösung von 50×50 Gitterpunkten bei den durchgeführten Rechnungen könnte dies für eine Stoßwelle am äußeren radialen Rand sprechen. Allerdings ist aus den Dichteprofilen ein Aufsteilen und die Bildung einer Stoßfront nicht eindeutig zu erkennen. Ein Problem ist, daß sich die auslaufenden Wellen im Laufe der Zeit aufgrund von nicht-linearen Effekten verändern. Dadurch kann die beobachtete Asymmetrie der Wellen auch durch perspektivische Effekte verursacht werden. Hierfür spricht auch, daß zumindest in Abbildung 5.11d die Welle bereits zur Zeit $t = 0$ asymmetrisch ist.



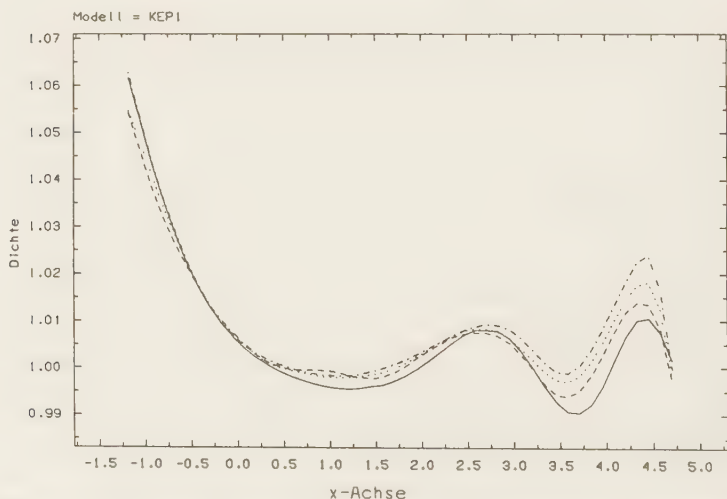
Figur 5.11a: Radiale Dichteprofile bei Modell KEP1 mit $M = 0.1$ zu verschiedenen Zeiten zwischen den azimutalen Punkten $Y=2.88$ und $Y=5.77$. (durchgezogen $t=0.0$, gestrichelt $t=13.15$, punktiert $t=27.86$ und strich-punktiert $t=42.54$)



Figur 5.11b: Radiale Dichteprofile bei Modell KEP1 mit $M = 0.1$ zu verschiedenen Zeiten zwischen den azimutalen Punkten $Y=2.88$ und $Y=4.70$. (durchgezogen $t=0.0$, gestrichelt $t=13.15$, punktiert $t=27.86$ und strich-punktiert $t=42.54$)



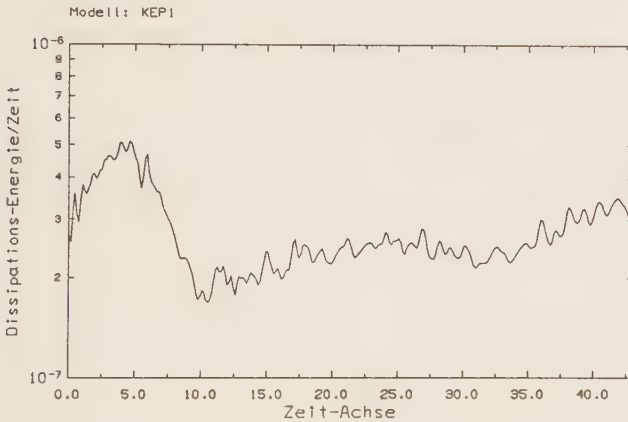
Figur 5.11c: Radiale Dichteprofile bei Modell KEP1 mit $M = 0.1$ zu verschiedenen Zeiten zwischen den azimuthalen Punkten $Y=2.88$ und $Y=3.64$. (durchgezogen $t=0.0$, gestrichelt $t=13.15$, punktiert $t=27.86$ und strich-punktiert $t=42.54$)



Figur 5.11d: Radiale Dichteprofile bei Modell KEP1 mit $M = 0.1$ zu verschiedenen Zeiten bei $Y=2.88$. (durchgezogen $t=0.0$, gestrichelt $t=13.15$, punktiert $t=27.86$ und strich-punktiert $t=42.54$)

Selbst wenn sich überhaupt keine Anzeichen für die Bildung von Stoßwellen zeigen würden, wäre dies nach den oben gemachten Bemerkungen noch kein eindeutiges Zeichen für eine Phasenverschiebung zwischen den Geschwindigkeitsfluktuationen als Sättigungsmechanismus. Denn da die Anwachsrate so gering sind, ist die Bildung von Stoßwellen innerhalb eines Wellenprofils nur sehr schwer erkennbar.

Genauere Aussagen darüber kann die Dissipationszeitskala machen. Die Abbildung 5.12 zeigt die pro Zeitschritt und pro Gitterzelle dissipierte Energie im Laufe der zeitlichen Entwicklung.



Figur 5.12: Dissipierte Energie pro Zeitschritt bei Modell KEP1 mit $M = 0.1$.

Vergleicht man diese mit der Fluktuationsenergie von Abbildung 5.1, so erhält man eine Dissipationszeitskala von

$$\frac{E_{Diss}/t}{E_{Fl}} \sim \frac{3 \cdot 10^{-7}}{10^{-4}} \sim 10^{-3}.$$

Diese Zeitskala ist vergleichbar mit der Anwachsrate der Instabilität. Das gleiche Resultat erhält man ebenfalls bei allen anderen gerechneten Modellen. Daraus läßt sich schließen, daß der Sättigungseffekt wahrscheinlich nicht durch die Phasenverschiebung zwischen den Geschwindigkeiten zustande kommt, als vielmehr durch die erhöhte Dissipation in Stoßwellen.

Die Diskussion in Kapitel 3.1 hat gezeigt, daß bei turbulenten Modellen der viskose Spannungstensor die von Shakura und Sunyaev(1973) vorgeschlagene Abhängigkeit vom Druck annehmen kann. Der α -Parameter beschreibt in diesem Fall das Verhältnis von turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen zur Schallgeschwindigkeit, d.h. die Machzahl der turbulenten Fluktuationen. Die Geschwindigkeitsfluktuationen im gesättigten Fall würden damit, wenn sie Turbulenz entsprächen, auf einen Wert von

$$\alpha \approx (0.5 - 0.6)$$

hinweisen. Allerdings muß man berücksichtigen, daß diese Geschwindigkeiten nichts mit Turbulenz zu tun haben, sondern vielmehr akustische Wellen darstellen. Eine richtige Beschreibung des Viskositätsparameters kann daher nur über den radialen Impulstransport abgeleitet werden.

Ohne Viskosität kann Drehimpuls nur über die Advektionsterme transportiert werden. Der Fluß von azimuthalem Impuls in radialer Richtung P_{xy} ist nach Gleichung 2.2 gegeben durch

$$P_{xy} = \rho \cdot v \cdot u.$$

Spaltet man die Azimutalggeschwindigkeit v auf in die Keplergeschwindigkeit v_{kep} und die Fluktuationsgeschwindigkeit v_t

$$v = v_{kep}(x) + v_t,$$

so erhält man nach Mittelung von P_{xy} in azimuthaler Richtung

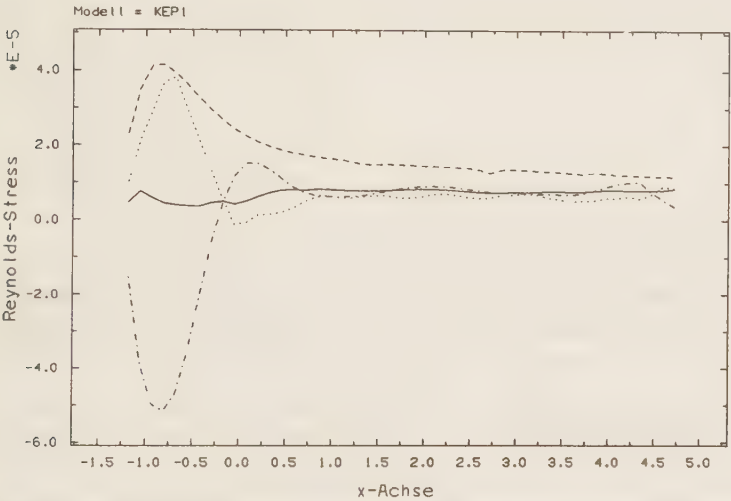
$$\langle P_{xy} \rangle_y = \langle \rho v_{kep} \cdot u \rangle_y + \langle \rho v_t \cdot u \rangle_y = \langle \rho v_t \cdot u \rangle_y,$$

da der Mittelwert über die Fluktuationen verschwindet. P_{xy} bezeichnet man als x,y-Komponente des Reynolds-Spannungstensors. Sie beschreibt den Transport von azimuthalem Impuls in radialer Richtung durch Störungen innerhalb der Strömung und stellt damit ein geeignetes Mittel für die Bestimmung des α -Parameters dar. Aus dem Reynolds-Spannungstensor leitet sich nach

$$t_{r\varphi} = P_{xy} = \alpha \cdot p \tag{5.2}$$

ein α -Wert ab.

Die Abbildung 5.13 zeigt die zu verschiedenen Zeiten über die azimutale Richtung gemittelte radiale Verteilung des turbulenten Impulstransport-Tensors (Reynolds-Spannungstensor), in 5.13a für Modell KEP1 mit $M = 0.1$, in 5.13b mit $M = 0.6$ und in Abbildung 5.13c für Modell KEP5 mit $M = 0.1$ und in 5.13d mit $M = 0.8$. Die durchgezogene Linie gibt jeweils den aus allen Zeitschritten berechneten Mittelwert wieder.

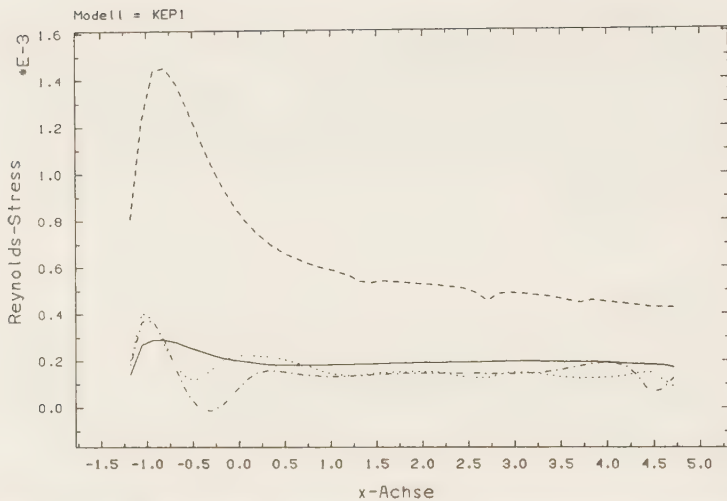


Figur 5.13a: Die x,y -Komponente des Reynolds-Spannungstensors für Model KEP1 mit $M = 0.1$ zu verschiedenen Zeiten (gestrichelt $t=11.25$, punktiert $t=23.55$, strichpunktiert $t=36.82$) und der zeitliche Mittelwert (durchgezogen).

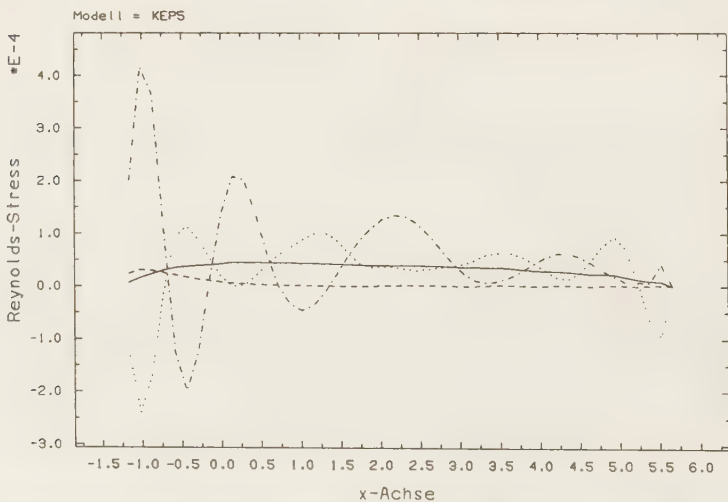
Bei allen Modellen ist der Reynolds-Spannungstensor im zeitlichen Mittel überall positiv. Das bedeutet, daß radial akkretierte Materie negative Azimutalgeschwindigkeit advektiert. Das entspricht aber gerade einem Drehimpulstransport nach außen. Aus dem Reynolds-Spannungstensor leitet sich nach diesen Rechnungen mit Gleichung (5.2) ein α -Wert ab. In Tabelle 5.3 sind die Ergebnisse zusammengefaßt.

Tabelle 5.3 Die effektive Viskosität der instabilen Eigenmoden

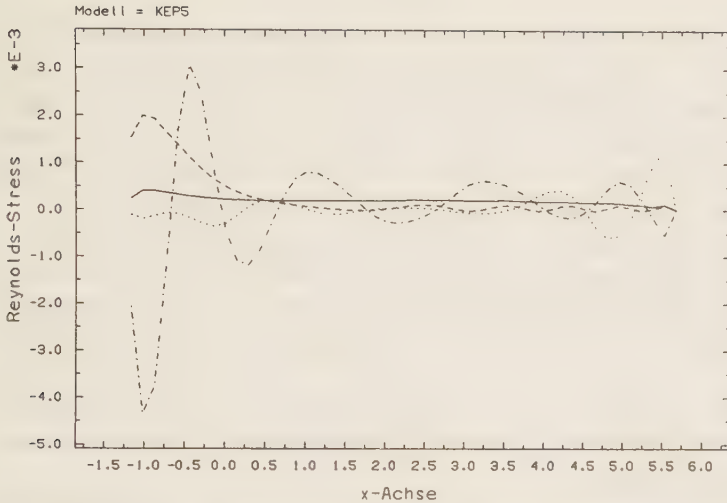
Modell	KEP1	KEP1	KEP5	KEP5
M	0.1	0.6	0.1	0.8
α	$0.6 \cdot 10^{-5}$	$0.21 \cdot 10^{-3}$	$0.32 \cdot 10^{-4}$	$0.29 \cdot 10^{-3}$



Figur 5.13b: Die x,y -Komponente des Reynolds-Spannungstensors für Model KEP1 mit $M = 0.6$ zu verschiedenen Zeiten (gestrichelt $t=11.25$, punktiert $t=23.55$, strichpunktiert $t=36.82$) und der zeitliche Mittelwert (durchgezogen).



Figur 5.13c: Die x,y -Komponente des Reynolds-Spannungstensors für Model KEP5 mit $M = 0.1$ zu verschiedenen Zeiten (gestrichelt $t=11.25$, punktiert $t=23.55$, strichpunktiert $t=36.82$) und der zeitliche Mittelwert (durchgezogen).



Figur 5.13d: Die x,y -Komponente des Reynolds-Spannungstensors für Model KEP5 mit $M = 0.8$ zu verschiedenen Zeiten (gestrichelt $t=11.25$, punktiert $t=23.55$, strichpunktiert $t=36.82$) und der zeitliche Mittelwert (durchgezogen).

Die Größe des α -Parameters wird bestimmt von den Anwachsraten der Instabilitäten. So zeigen die Modelle KEP1 und KEP5 mit $M = 0.1$ einen um eine Größenordnung unterschiedlichen α -Wert entsprechend ihren verschiedenen Anwachsraten. Bei $M = 0.6$ hat sich das System gesättigt. In diesem Zustand ergibt sich aus dem radialen Impulstransport ein maximaler Wert von $\alpha = 2.1 \cdot 10^{-4}$ bei einem festen inneren und einem transmittierenden äußeren Rand und ein nahezu gleicher Wert von $\alpha = 2.9 \cdot 10^{-4}$ bei zwei festen Randbedingungen.

Nach den Beobachtungen (siehe Kapitel 3) erwartet man $10^{-2} \leq \alpha \leq 1.0$. Damit liegt die aus den instabilen akustischen Eigenmoden abgeleitete Viskosität im gesättigten Zustand um etwa zwei Größenordnungen unterhalb dieser Grenzen.

Dies bedeutet aber keinesfalls, daß turbulente Modelle für die hohe Viskosität in Akkretionsscheiben vollkommen ausscheiden. Die hier untersuchten instabilen Moden entwickeln überhaupt kein turbulentes Geschwindigkeitsfeld. Das kann real sein oder aber auch ein allgemeines numerisches Problem darstellen, das bereits von der Simulation der Laborströmungen her bekannt ist (siehe Kapitel 4.2.3). Es ist nicht auszuschließen, daß auch für die Entwicklung von Turbulenz in der Keplerströmung drei-dimensionale Effekte eine wesentliche Rolle spielen. Dieses Problem geht allerdings weit über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

5.1.2 Zufällig verteilte Fluktuationen als turbulentes Anfangsmodell

Als Anfangsmodell wurde eine homogene Verteilung der Dichte und der inneren Energie angenommen. Die Amplituden der Geschwindigkeitsfluktuationen an jedem Gitterpunkt wurden über einen Zufallsgenerator bestimmt. In azimuthaler Richtung wurden periodische Randbedingungen benutzt, in radialer Richtung feste.

Die anfängliche turbulente Verteilung besteht damit aus einem breiten Spektrum von Wellen. Im linearen Fall erwartet man, daß die stabilen Moden gedämpft werden und daß die neutralen und instabilen Moden übrigbleiben. Die instabilen Wellen mit den größten Anwachsrate sollten im Verhalten der turbulenten Energie zu erkennen sein.

Die wesentlichen Parameter bei diesen Rechnungen waren die Gitterauflösung und die Gitterausdehnung in Einheiten der Scheibendicke. In der Tabelle 5.4 sind einige Modelle aufgelistet.

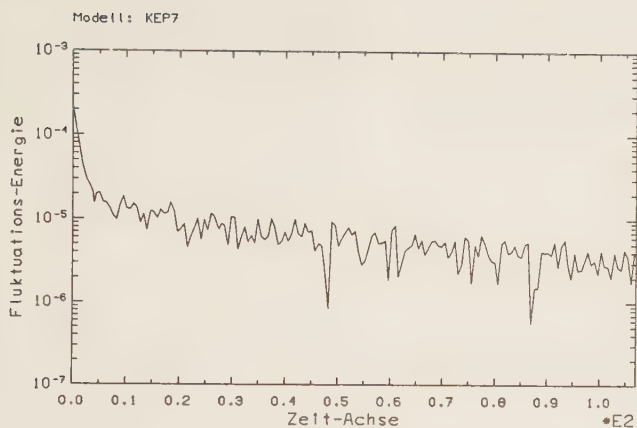
Tabelle 5.4 Modellparameter bei zufällig verteilten Anfangsfluktuationen

<i>Modell</i>	<i>KEP6</i>	<i>KEP7</i>	<i>KEP8</i>	<i>KEP9</i>	<i>KEP10</i>
Gitterauflösung	20 × 20	50 × 50	25 × 25	35 × 35	50 × 50
Gitterausdehnung	1.0 × 1.0	1.0 × 1.0	3.75 × 3.75	5.0 × 5.0	7.5 × 7.5

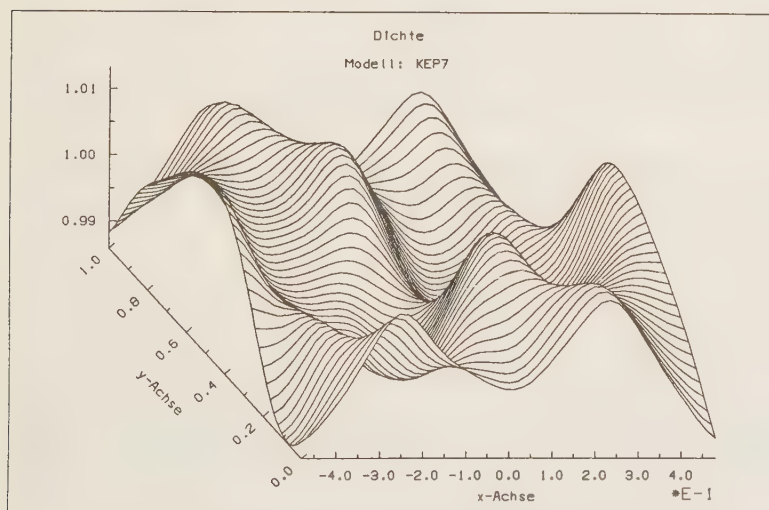
Die Modelle KEP8 bis KEP10 haben die gleiche Auflösung. Sie entspricht genau der Gitterauflösung, die auch bei den Standardrechnungen der instabilen Eigenmoden von Kapitel 5.1 benutzt wurde.

Das typische Ergebnis solcher Rechnungen ist in Abbildung 5.14 dargestellt. Das zeitliche Verhalten der Fluktuationsenergie zeigt anfangs eine sehr starke Dämpfung, in der Regel um ein bis zwei Größenordnungen. Danach deutet sich eine langsame aber stetige Dämpfung der Fluktuationen an. Selbst nach über 100 Umdrehungen konnten keine Anzeichen einer Instabilität gefunden werden.

Anhand der Dichteverteilung (Abbildung 5.15) erkennt man, daß die hohen räumlichen Frequenzen sehr schnell (nach ca. 10 Umdrehungen) weggedämpft werden. Das äußert sich ebenfalls in dem steilen Abfall der turbulenten Energie innerhalb der ersten Zeitskalen. Von den anfangs zufällig verteilten Fluktuationen geht das System über in einen Zustand, der durch zwischen den festen Rändern hin und her reflektierende, akustische Wellen charakterisiert ist.



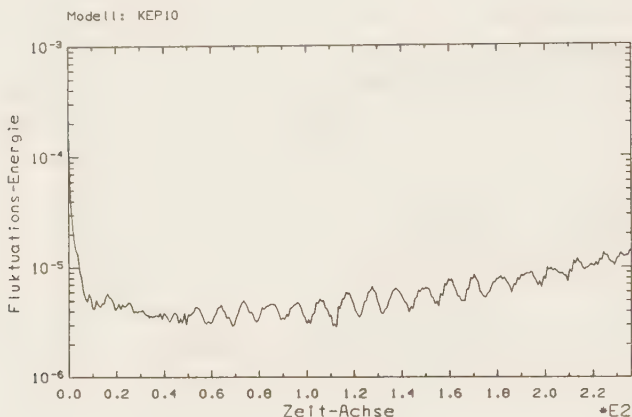
Figur 5.14: Das zeitliche Verhalten der Fluktuationsenergie bei Modell KEP7.



Figur 5.15: Die Dichteverteilung nach $t = 100$ Umdrehungen bei Modell KEP7.

Nur das Modell KEP10 läßt nach etwa 50 Umdrehungen ein Anwachsen der Fluktuationsenergie erkennen (Abbildung 5.16). Die Anwachsrates bewegt sich in der

Größenordnung von 10^{-3} bis 10^{-2} und liegt damit in dem Bereich der akustischen Instabilitäten von Kapitel 5.1.1. Wie bei allen derartigen Rechnungen entwickelt sich die Dichteverteilung zu einem Zustand aus zwischen den festen Wänden hin und her reflektierenden, akustischen Wellen.



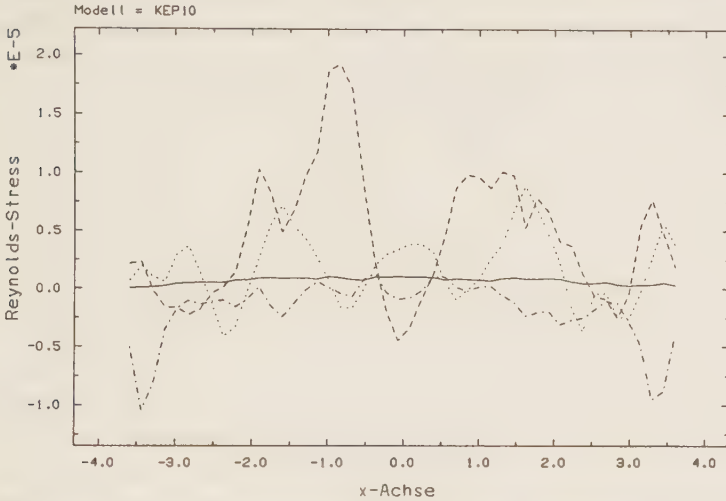
Figur 5.16: Das zeitliche Verhalten der Fluktuationsenergie bei Modell KEP10.

Um den Sättigungszustand dieser Instabilität zu untersuchen, wurden die Geschwindigkeitsfluktuationen bei $T = 50$ Umdrehungen willkürlich um einen konstanten Faktor A_0 erhöht. Für $A_0 > 2$ setzte ein sehr schneller Abfall der Fluktuationsenergie ein, für $A_0 < 2$ dauerte das Anwachsen der Instabilität weiter an und für $A_0 \sim 2$ ging das System in einen nahezu stationären Zustand über. Die Machzahl der restlichen Fluktuationen lag im Bereich um $1.3 \cdot 10^{-2}$.

In dem gesättigten Zustand ist die pro Zeiteinheit dissipierte Energie um eine Größenordnung kleiner als die Fluktuationsenergie. Dies deutet darauf hin, daß in diesem Fall der Sättigungseffekt eher durch eine Phasenverschiebung zwischen den Geschwindigkeitsfluktuationen hervorgerufen wird als durch Dissipation in Stoßwellen.

Eine Abschätzung für den α -Parameter erhält man aus der Analyse des Reynolds-Spannungstensors (siehe Gleichung (5.2) in Kapitel 5.1). Die Abbildung 5.17 zeigt den radialen Verlauf der x,y-Komponente des Reynolds-Spannungstensors

(Reynolds-Stress) zu verschiedenen Zeiten und den aus allen Zeitschritten berechneten Mittelwert (durchgezogene Linie) für das Modell KEP10 im gesättigten Zustand.



Figur 5.17: Die x,y -Komponente des Reynolds-Spannungstensors für Model KEP10 zu verschiedenen Zeiten (gestrichelt $t=50.03$, punktiert $t=78.95$, strich-punktiert $t=107.95$) und der zeitliche Mittelwert (durchgezogen).

Daraus berechnet sich mit Gleichung (5.2) ein maximales α von

$$\alpha \sim 2.5 \cdot 10^{-6}.$$

Der wesentliche Parameter für das Auftreten dieser Instabilität scheint die radiale Ausdehnung des Rechengitters zu sein, bzw. die radiale Position der festen Ränder. Narayan et al.(1987) haben gezeigt, daß im Fall von inneren und äußeren festen Randbedingungen die meisten Moden neutral sind. Nur ganz vereinzelt können sich Instabilitäten entwickeln, nämlich nur dann, wenn für beide Resonanzräume geeignete Phasenbeziehungen gleichzeitig erfüllt sind. Das äußerst seltene Auftreten von instabilen Fällen bei derartigen numerischen Rechnungen könnte bedeuten, daß es sich bei den gefundenen Instabilitäten um genau diese akustischen Moden handelt, die durch Over-Reflektion an der kritischen Schicht und durch Rückkopplung an zwei festen Wänden entstehen.

Für die Viskosität in Akkretionsscheiben erscheinen diese Instabilitäten allerdings weniger bedeutsam. Zum einen liefern sie einen α -Wert, der weit unterhalb der von der Beobachtung her zu erwartenden Viskositäten liegt, und zum anderen ist es außerordentlich fraglich, ob sich innerhalb einer dünnen Akkretionsscheibe über nur wenige Skalenlängen (eine Skalenlänge ist in der Größenordnung der Scheibendicke) solche Verhältnisse bilden können, die zwei festen Rändern in radialer Richtung entsprechen.

5.2 Stoßdissipation in dünnen Akkretionsscheiben

Als möglicher Viskositätsprozeß in Akkretionsscheiben wurde in Kapitel 3.2 die Dissipation in Stoßfronten diskutiert. Sawada et al.(1986,1987) konnten in numerischen Rechnungen zeigen, daß sich, vermutlich ausgelöst durch Gezeitenkräfte und/oder durch das Auftreffen der Materie auf den äußeren Rand der Scheibe, nahezu stationäre, spiralförmige Stoßwellen entwickeln und sich bis in den inneren Bereich der Scheibe ausbreiten. Spruit(1986) konnte nachweisen daß die hydrodynamischen Gleichungen in dünnen Scheiben Ähnlichkeitslösungen von Stoßwellen besitzen.

Damit ist allerdings in keiner Weise geklärt, welche Bedeutung Stoßwellen für den Akkretionsprozeß darstellen. Sawada et al.(1986,1987) und Spruit(1986) studieren die globale Struktur von Stoßwellen innerhalb der Scheibe. In dieser Arbeit werden diese Phänomene unter einem mehr lokalen Aspekt untersucht. Zentrale Fragen dabei sind, ob durch Störungen innerhalb oder an den Rändern der Scheibe Stoßwellen gebildet werden können, wie weit sie sich innerhalb der Scheibe ausbreiten und welchen Einfluß sie auf die Akkretion haben.

Der in Kapitel 4.1 beschriebene Rechencode wurde benutzt, um die zeitliche Entwicklung von Störungen innerhalb der Keplerscheibe zu studieren. Als Anfangsbedingung wurde eine mitrotierende Dichtestörung am Innenrand bzw. Außenrand des Gitters gewählt. Diese Verhältnisse sollen einer Störung an der Oberfläche des akkretierenden Objektes entsprechen oder aber einer Störung an der Magnetosphäre eines rotierenden Neutronensterns (Michel,1984), bzw. können Störungen am äußeren Rand der Scheibe durch Gezeitenkräfte oder durch den Materiestrom simulieren. Parameter der Rechnungen ist die Machzahl der Störung, die definiert ist als

$$M = \max \left(\frac{v_t - v_{kep}}{c_s} \right). \quad (5.3)$$

D.h. die Machzahl bedeutet die Geschwindigkeit der Störung relativ zur Keplerströmung an der entsprechenden radialen Position dividiert durch die Schallgeschwindigkeit. Bezugssystem der Rechnungen ist der mit der Störung mitrotierende Innen- bzw. Außenrand des Gitters. In azimuthaler Richtung wurden periodische Randbedingungen benutzt, in radialer Richtung ein mit der Dichtestörung fest verbundener Innenrand und ein transmittierender Außenrand.

In der Tabelle 5.5 sind die Modelle der verschiedenen Simulationsrechnungen aufgelistet. Ebenfalls angegeben ist bereits der α -Parameter, der über den radialen

Impulstransport aus den numerischen Rechnungen nach Gleichung (5.2) abgeleitet wurde.

Tabelle 5.5 Modellparameter für die Ausbreitung von Störungen

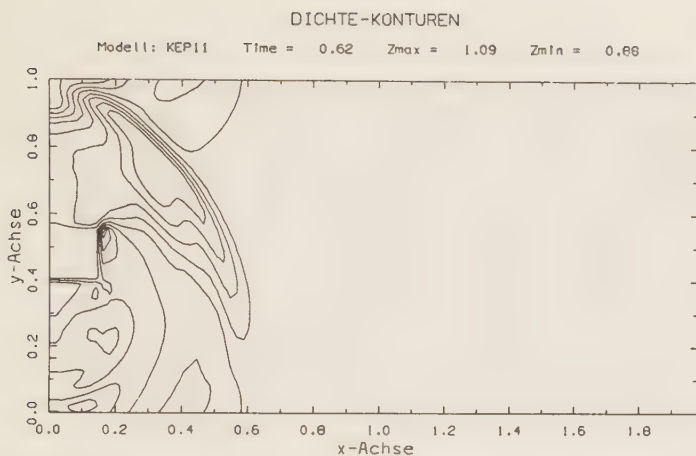
Modell	KEP11	KEP12	KEP13	KEP14
M	0.16	0.5	1.0	-0.5
α	$5.6 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$4.2 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$

Positive Machzahl bedeutet, daß die Störung schneller rotiert als es der Kepler-geschwindigkeit entspricht. Aus Symmetriegründen entspricht einer Störung mit $M = -0.5$ am Innenrand einer Störung von $M = 0.5$ am Außenrand. Dies erkennt man daran, daß bei Drehung von 180° um $x = 0$ und beliebigem y (entsprechend der Transformation $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, u \rightarrow -u, v \rightarrow -v, \rho \rightarrow \rho$ und $p \rightarrow p$) das Gleichungssystem (2.14-2.18) unverändert bleibt. Allerdings müssen noch linke und rechte Randbedingung vertauscht werden. Damit erlauben diese Rechnungen auch Rückschlüsse auf Effekte, die von außen induziert werden.

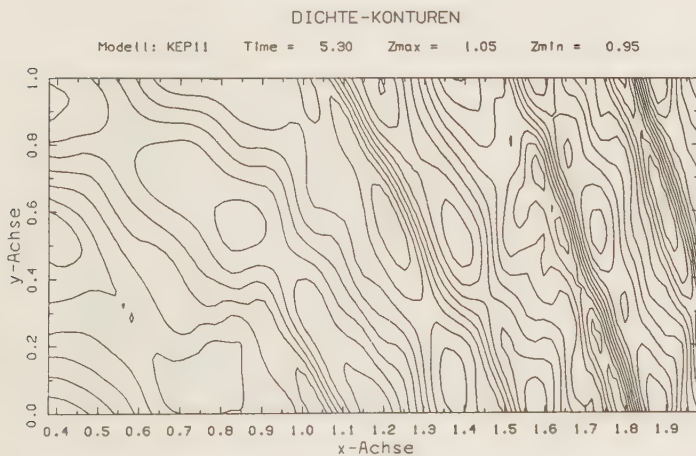
Die zeitliche Entwicklung der Störungsausbreitung anhand der Dichtestrukturen ist in Abbildung 5.18 für Modell KEP11 dargestellt. Die Abbildung 5.18a zeigt die Dichtestruktur bevor die Störungen den äußeren transmittierenden Rand erreicht haben. Deutlich zu erkennen ist die Anfangssituation mit einer Dichtestörung, die fest mit dem Innenrand verbunden ist und entsprechend der in Gleichung (5.3) definierten Machzahl schneller oder langsamer als mit Keplergeschwindigkeit rotiert. In den Abbildungen 5.18b - 5.18f wurde nur der äußere Teil des Rechengitters dargestellt.

Man erkennt die Bildung spiralförmiger Wellen. Da die Schallgeschwindigkeit konstant ist, und da die Frequenz der Wellen in der differentiell rotierenden Scheibe nach außen anwächst, nimmt die Wellenlänge der Störungen in radialer Richtung ab. Ebenfalls ist deutlich ein Anwachsen der Dichtegradienten in radialer Richtung zu erkennen. Die Wellenfronten sind moduliert durch die endliche Ausdehnungen der Störung. Restliche Reflektionen am transmittierenden Rand können für die Modulation ausgeschlossen werden, da die Simulationsrechnungen mit den instabilen Eigenfunktionen im linearen Bereich kaum Randeffekte zeigen.

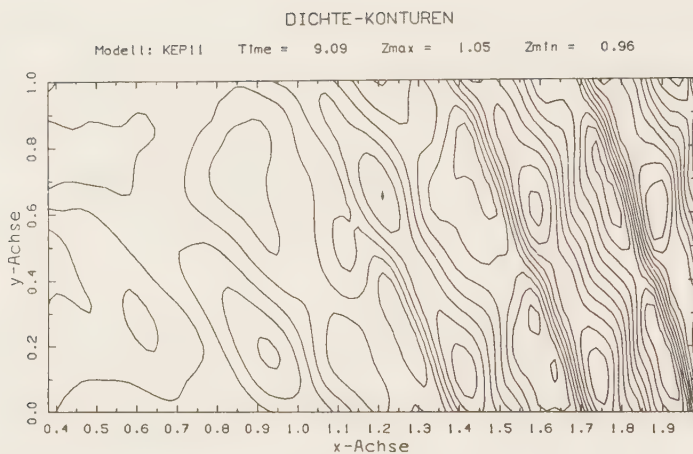
In den Abbildungen 5.19 ist die Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung am Ende der Simulationsrechnungen bei den Modellen KEP12 - KEP14 dargestellt.



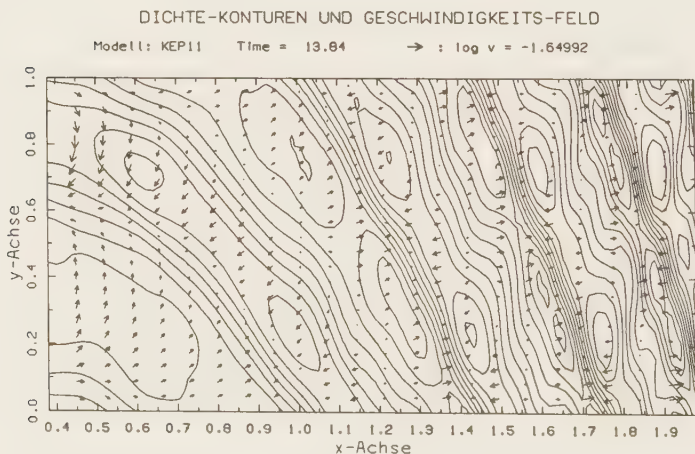
Figur 5.18a: Die Dichtestruktur zur Zeit $t=0.62$ bei Model KEP11. $Z_{\max}$ und $Z_{\min}$ kennzeichnen das Maximum und Minimum der Dichte.



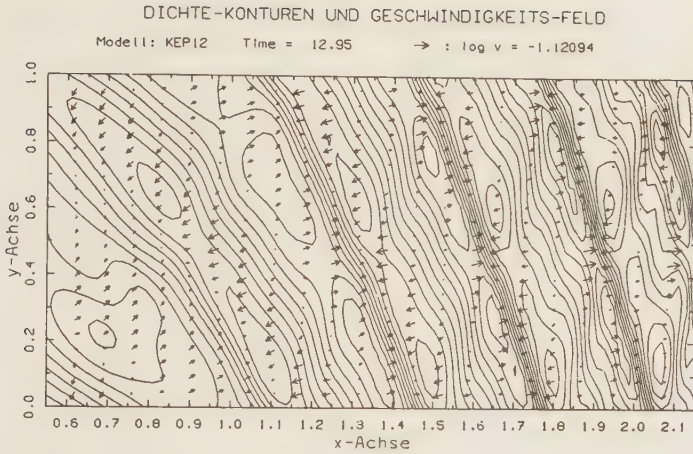
Figur 5.18b: Die Dichtestruktur zur Zeit $t=5.30$ bei Model KEP11. $Z_{\max}$ und $Z_{\min}$ kennzeichnen das Maximum und Minimum der Dichte.



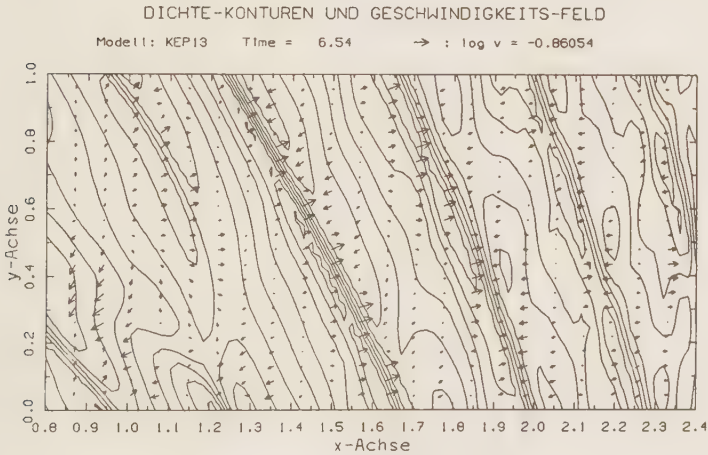
Figur 5.18c: Die Dichtestruktur zur Zeit $t=9.09$ bei Model KEP11. $Z_{\max}$ und $Z_{\min}$ kennzeichnen das Maximum und Minimum der Dichte.



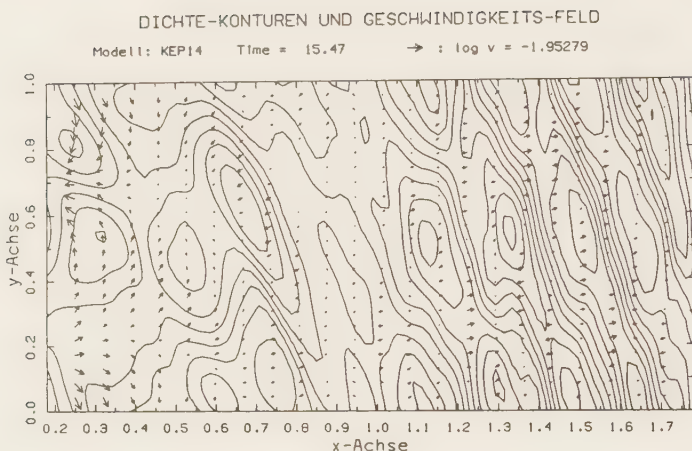
Figur 5.18d: Die Dichtestruktur und das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit $t=13.84$ bei Model KEP11



Figur 5.19a: Die Dichtestruktur und das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit $t=12.95$ bei Model KEP12



Figur 5.19b: Die Dichtestruktur und das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit $t=6.54$ bei Model KEP13

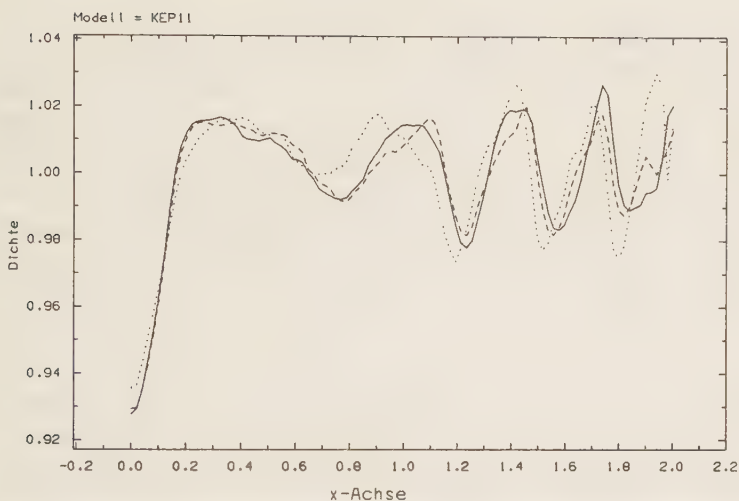


Figur 5.19c: Die Dichtestruktur und das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit $t=15.47$ bei Modell KEP14

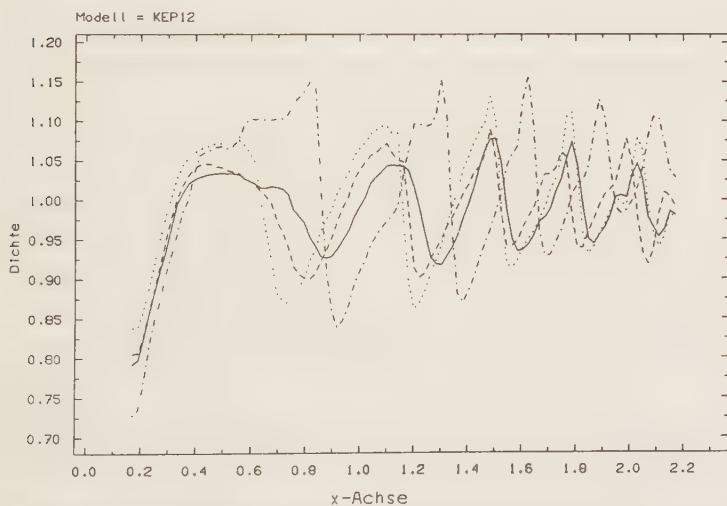
Bei dem Modell KEP11 mit $M = 0.16$ kann man einen Anstieg der Amplituden in radialer Richtung erkennen. Deutlicher wird dieses Verhalten, wenn man die Dichteprofile senkrecht zu den Wellenfronten betrachtet. Abbildung 5.20 zeigt die Entwicklung der Dichteprofile im Laufe der Zeit für die Modelle KEP11 - KEP14.

Bei den Modellen mit $M > 0$ kann man einen Abfall der Dichte am Innenrand beobachten. Deutlich zu erkennen ist die Bildung von Stoßwellen. Der Abstand der Stoßfronten nimmt in radialer Richtung ab, da die Schallgeschwindigkeit überall konstant ist. Bei Modell KEP11 wächst die Amplitude nach außen leicht an, während sie in den Modellen KEP12 und KEP13 abfällt.

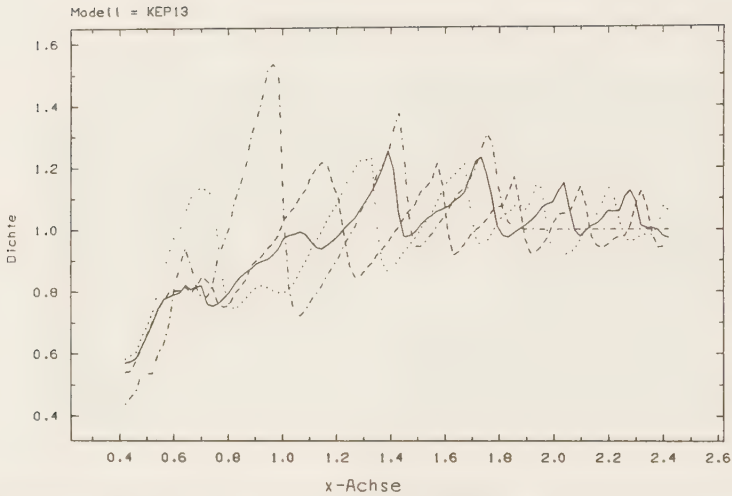
In Modell KEP14 rotiert die Störung am Innenrand langsamer als mit Keplergeschwindigkeit. Dies erzeugt ein Anwachsen der Dichte am Innenrand. Spiralförmige Störungen breiten sich aus, die allerdings nicht das typische Profil von Stoßwellen zeigen (siehe Abbildung 5.20d). Die Dichteprofile erscheinen sehr symmetrisch und deuten zu diesem Zeitpunkt eher auf akustische Wellen hin. Deutlich ist ein Anwachsen der Amplituden nach außen zu erkennen.



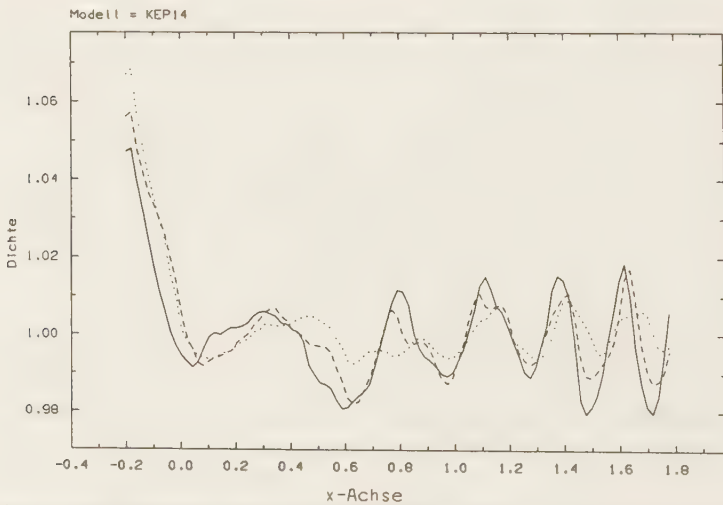
Figur 5.20a: Radiale Dichteprofile bei Modell KEP11 zu verschiedenen Zeiten senkrecht zu den auslaufenden Störungen. (durchgezogen $t=14.78$, gestrichelt $t=12.9$ und punktiert $t=9.09$)



Figur 5.20b: Radiale Dichteprofile bei Modell KEP12 zu verschiedenen Zeiten senkrecht zu den auslaufenden Störungen. (durchgezogen $t=12.95$, gestrichelt $t=9.45$, punktiert $t=5.94$ und strich-punktiert $t=2.45$)



Figur 5.20c: Radiale Dichteprofile bei Modell KEP13 zu verschiedenen Zeiten senkrecht zu den auslaufenden Störungen. (durchgezogen $t=14.32$, gestrichelt $t=6.40$, punktiert $t=4.22$ und strich-punktiert $t=2.03$)



Figur 5.20d: Radiale Dichteprofile bei Modell KEP14 zu verschiedenen Zeiten senkrecht zu den auslaufenden Störungen. (durchgezogen $t=12.75$, gestrichelt $t=9.83$ und punktiert $t=6.91$)

Physikalisch läßt sich das radiale Verhalten der Störungen aus der Erhaltung der Drehimpulsdichte verstehen. Dem Korotationspunkt der Störung kommt dabei eine besondere Bedeutung zu. Es ist der Punkt innerhalb einer Strömung (hier Keplerströmung), der die gleiche Umdrehungsrate hat wie die Störung. Von der theoretischen Seite her weiß man, daß innerhalb einer Scherströmung die Energie einer Welle keine Erhaltungsgröße ist, dafür aber die Drehimpulsdichte L (Lighthill(1978), Narayan et al.(1987), Spruit et al.(1987)). Sie ist gegeben durch

$$L = \frac{E_{Welle}}{\sigma} \cdot m = \frac{1}{2} \rho \cdot \bar{v}^2 \cdot \frac{m}{\sigma}. \quad (5.4)$$

Die Größe σ beschreibt die Frequenz der Störung relativ zur Keplerströmung, m ist die Wellenzahl. Die Größe $\frac{E_{Welle}}{\sigma}$ bezeichnet man auch als "wave action". Die Erhaltung der Drehimpulsdichte bzw. der "wave action" bedeutet, daß die Energie der Welle E_{Welle} dividiert durch die Frequenz σ der Welle (relativ zu der Strömung!) integriert über das Volumen der Welle eine Erhaltungsgröße darstellt. Sie ist von der Dimension einer Drehimpulsdichte.

Dieser Erhaltungssatz hat sehr weitreichende Konsequenzen und führt dazu, daß die Amplitude der Wellenenergie ansteigt, sobald sich die Welle in Gebiete mit größerem σ ausbreitet, also wenn sie sich z.B. vom Korotationspunkt ($\sigma = 0$) wegbewegt. Auf der anderen Seite verliert die Welle Energie an die Strömung wenn σ kleiner wird, z.B. bei Annäherung an die korotierende Schicht.

Aufgrund dieser Überlegungen erwartet man, daß sich bei allen Rechnungen mit $M > 0$ (siehe Gleichung (5.3) für die Definition der Machzahl) die Störungen mit wachsender Amplitude in radialer Richtung ausbreiten, eventuell aufsteilen und Stoßfronten bilden. Bei Anfangsbedingungen mit $M < 0$ kann der Korotationspunkt innerhalb des Rechengitters liegen. In diesem Fall erwartet man ein Abklingen der Amplituden bei Annäherung an den Korotationspunkt. Zumindest theoretisch möglich ist ein Anwachsen der durch die kritische Schicht transmittierten Welle und bei geeigneten Phasenbeziehungen auch der over-reflektierten Welle.

Aufgrund dieser Überlegungen sollte bei $M > 0$ die Amplitude ständig zunehmen, zumindest solange bis sich ein Gleichgewicht zwischen dem Anwachsen aufgrund der Erhaltung der Drehimpulsdichte und der Dissipation in Stoßfronten einstellt. Auf Akkretionsscheiben übertragen muß allerdings die bzgl. der hier durchgeführten Rechnungen unterschiedliche Geometrie berücksichtigt werden. Nach außen laufende

Wellen nehmen ein ständig wachsendes Volumen ein und müßten demnach in ihrer Amplitude abnehmen. Dem entsprechend werden nach innen laufende Störungen aufgrund dieses Volumeneffektes anwachsen. Das endgültige Verhalten von Wellen wird demnach von zwei Faktoren bestimmt, einmal durch ihre Ausbreitung relativ zum Korotationspunkt und zum anderen durch den Volumeneffekt. In unmittelbarer Nähe des Korotationspunkts liefern die durchgeführten Rechnungen damit sicherlich eine gute Beschreibung der Verhältnisse.

Der Drehimpulstransport bei diesen Modellen wird durch Dissipation der Wellen bewirkt (Spruit et al.(1987)). Voraussetzung ist, daß die Welle negative Drehimpulsdichte ($\sigma < 0$) relativ zur Grundströmung besitzt. Dies ist der Fall für eine Welle, die sich innerhalb des Korotationsradius ausbreitet, also z.B. bei einer am äußeren Rand angeregten und nach innen laufenden Störung oder bei einer Welle, die durch einen unterkritisch ($v < v_{kep}$) rotierenden Innenrand bzw. durch eine unterkritisch rotierende Störung innerhalb der Scheibe erzeugt wurde und nach außen läuft. In einem solchen Fall führt Dissipation der Welle zu einem Impulstransport auf die Grundströmung. Da sich die Welle relativ zur Strömung in die entgegengesetzte Richtung bewegt, wird die Keplerströmung abgebremst. Damit hat die Welle durch Dissipation Drehimpuls der Grundströmung entnommen und Akkretion ermöglicht. Außerhalb des Korotationsradius ist die Drehimpulsdichte der Welle positiv. Dissipation der Welle überträgt Impuls in Richtung der Strömung und beschleunigt sie damit. In diesem Fall gewinnt die Grundströmung Drehimpuls und verhindert Akkretion.

Die Erhaltung der Drehimpulsdichte macht das Anwachsen der Amplitude in radialer Richtung bei Modell KEP11 verständlich. Die nach außen laufenden Störungen entfernen sich vom Korotationspunkt, und die Erhaltung der Drehimpulsdichte ist nur dann gewährleistet, wenn die Amplitude der Störung anwächst. Bei den Modellen KEP12 und KEP13 mit $M = 0.5$ bzw. $M = 1.0$ überwiegt die Dissipation in den Stoßfronten. Sie ist im Vergleich zu Modell KEP11 um eine bzw. zwei Größenordnungen höher und verhindert ein radiales Anwachsen der Amplituden.

Bei Modell KEP14 bewegt sich die Störung am Innenrand ($x = -0.17$) langsamer als mit Keplergeschwindigkeit. Der Korotationspunkt liegt bei $x = 0$. Angeregte Wellen werden an der korotierenden Schicht teilweise reflektiert und teilweise transmittiert. Die transmittierten Wellen bewegen sich anschließend vom Korotationspunkt weg. Sie zeigen aufgrund der Erhaltung der Drehimpulsdichte ein Anwachsen ihrer Amplituden. Allerdings zeigen sie bei $T = 12.75$ noch kein Aufsteilen zu Stoßwellen. Dies liegt daran, daß die Wellen nach dem "Durchtunneln" der korotierenden Schicht

erst langsam anwachsen können. Es kommt hinzu, daß die Wellenlänge der Störungen in radialer Richtung abnimmt, da die Schallgeschwindigkeit konstant ist. Dadurch kann wegen der endlichen Gitterauflösung ein Aufsteilen verhindert werden.

Der α -Parameter läßt sich aus diesen Rechnungen wieder über den radialen Impulstransport bzw. über den Reynolds- Spannungstensor nach Gleichung (5.2) bestimmen. Bei allen Modellen ist der Reynolds-Spannungstensor im zeitlichen und räumlichen Mittel positiv. Das heißt, daß negative Radialgeschwindigkeit (Akkretion) negative Azimutalgeschwindigkeit advektiert und das wiederum bedeutet einen Drehimpulstransport nach außen. Der aus diesen Modellrechnungen abgeleitete α -Parameter zeigt eine sehr starke Abhängigkeit von der Machzahl M der Störung und ist in Tabelle 5.5 angegeben. Die α -Werte bewegen sich in der Größenordnung von 10^{-4} bis 10^{-2} . Deutlich zu erkennen ist die Tendenz, daß α umso größer ist, je größer die Störung und je steiler die Wellenfronten sind.

Die Rechnungen haben gezeigt, daß nicht-axialsymmetrische Störungen innerhalb oder am Rande einer Akkretionsscheibe spiralförmige Stoßwellen erzeugen. Die Stärke der Stoßfronten und damit die Größe der daraus resultierenden Viskosität hängt ganz wesentlich von der Größenordnung der Störungen ab. Rotiert die Dichtestörung am Innenrand relativ zur Keplerströmung mit Schallgeschwindigkeit ($M = 1.0$, Modell KEP13), so resultiert daraus ein α -Parameter von $4.2 \cdot 10^{-2}$. Dieser Wert kommt damit in den Bereich der unteren Grenze von den aus Beobachtungen abgeleiteten α -Werten.

Im Prinzip können alle Störungen (Modell KEP11 bis Modell KEP14) zumindest nach einiger Zeit so hohe Viskositäten liefern. Voraussetzung ist nur, daß sich Wellen vom Korotationspunkt wegbewegen. Zur Erhaltung der Drehimpulsdichte werden sie sich früher oder später aufsteilen und Stoßwellen bilden. Eine Sättigung kommt durch Dissipation in den Stoßfronten zustande. Die bisherigen Rechnungen haben noch keinen Sättigungszustand gezeigt. Von daher gesehen muß man $\alpha \sim 10^{-2}$ als eine obere Grenze der Viskosität bei solchen Modellen verstehen.

Das Problem der Reibungsprozesse in dünnen Akkretionsscheiben kann durch Dissipation in Stoßwellen nicht als vollständig gelöst betrachtet werden. Aber zumindest erreichen die mit derartigen Modellen verbundenen Viskositäten den unteren Bereich der von der Beobachtung abgeleiteten α -Werte. Das läßt die Vermutung zu, daß Stoßdissipation zwar nicht allein den Akkretionsvorgang ermöglichen kann, aber sicherlich eine bedeutende Rolle bei Reibungsprozessen in Akkretionsscheiben spielt.

6. Schlußbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurden hydrodynamische Reibungsprozesse für die offensichtlich hohe Viskosität in Akkretionsscheiben studiert. In den Standardmodellen (α -Scheiben) von dünnen Akkretionsscheiben wird die Viskosität durch den α -Parameter künstlich erhöht. Aus Beobachtungen vorwiegend von zeitlich periodischen Akkretionsvorgängen leitet sich ein α -Wert im Bereich von

$$0.01 \leq \alpha \leq 1.0$$

ab.

Bei den hier untersuchten hydrodynamischen Prozessen handelt es sich um den erhöhten Impulstransport in einer turbulenten Strömung und um Dissipation in Stoßfronten. Beide Phänomene wurden in numerischen Simulationsrechnungen untersucht. Zu diesem Zweck wurden die nicht-linearen hydrodynamischen Grundgleichungen mit einem zwei-dimensionalen Differenzenschema numerisch gelöst.

Bzgl. der turbulenten Modelle wurde die zeitliche Entwicklung von linear instabilen Eigenmoden der Keplerströmung untersucht. Aus dem radialen Impulstransport läßt sich über den Reynolds-Spannungstensor ein α -Wert ableiten. Im gesättigten Zustand liefern die Simulationsrechnungen ein α im Bereich von

$$\alpha \sim (0.2 - 0.3) \cdot 10^{-3}.$$

Damit liegt die aus den instabilen Eigenmoden abgeleitete Viskosität um mindestens zwei Größenordnungen unterhalb der von den Beobachtungen gesetzten Grenze.

Dies bedeutet allerdings keinesfalls, daß turbulente Modelle für die hohe Viskosität in Akkretionsscheiben vollkommen ausscheiden, da die hier untersuchten instabilen Moden überhaupt kein turbulentes Geschwindigkeitsfeld hervorrufen.

Bisherige zwei-dimensionale Simulationen von Laborströmungen zeigen ebenfalls keinerlei Anzeichen von Turbulenz. Dies steht aber nicht in Widerspruch zu den experimentellen Beobachtungen, wonach alle Strömungen ab einer gewissen Reynoldszahl turbulent werden, da zwei-dimensionale Turbulenzversuche im Labor eigentlich überhaupt nicht gemacht werden können. Allerdings bleibt es fraglich, inwieweit derartige Simulationen für den drei-dimensionalen Fall relevant sind. Es ist nicht auszuschließen, daß auch für die Entwicklung von Turbulenz in der Keplerströmung drei-dimensionale Effekte eine entscheidende Rolle spielen.

Von der physikalischen Seite erscheint die Vernachlässigung von Strahlungsverlusten bei den numerischen Rechnungen fraglich. Energieverluste können stabilisierend, aber auch destabilisierend ein hydrodynamisches System beeinflussen. Verlässliche Aussagen kann nur die numerische Simulation liefern. Beide Punkte, die Einbeziehung von drei-dimensionalen Effekten und von Strahlungsverlusten sollten bei zukünftigen Untersuchungen unbedingt Beachtung finden.

In der vorliegenden Arbeit wurde ein erster Schritt unternommen, die Stabilität der Keplerströmung und die Entwicklung von Turbulenz in dünnen Akkretionsscheiben zu untersuchen. Das wesentliche Ergebnis ist, daß die hier studierten und auch von Drury(1980,1985), von Papaloizou und Pringle (1984,1985,1987) und von Narayan et al.(1987) untersuchten Instabilitäten nicht zu Turbulenz führen und nur sehr kleine α -Werte liefern.

Die Dissipation in Stoßfronten innerhalb der Akkretionsscheibe erscheint als weiterer möglicher Reibungsprozeß. Bzgl. dieser Problematik wurde in numerischen Simulationsrechnungen die Bildung von Stoßwellen durch Störungen am Innenrand des Rechengitters untersucht. Die Störungen bestanden aus einer Dichteinhomogenität, die sich entweder schneller oder langsamer als mit Keplergeschwindigkeit an der jeweiligen radialen Position bewegte. Aus Symmetriegründen entspricht einer Unterrotation ($v < v_{Kep}$) der Störung am Innenrand einer Störung mit $v > v_{Kep}$ am Außenrand und umgekehrt. Störungen am Innenrand können interne Störungen simulieren, wie Inhomogenitäten auf der Oberfläche eines Weißen Zwerges oder eine asymmetrische Magnetosphäre eines Neutronensterns, Störungen am Außenrand könnten durch Gezeitenkräfte eines Begleitsterns oder durch das Auftreffen des Akkretionsstroms am äußeren Rand der Scheibe verursacht werden.

Es ist nützlich an dieser Stelle darauf hinzuweisen, daß die Probleme von Stoßwellen in Akkretionsscheiben eng verknüpft sind mit der Bildung von Spiralarmen in Galaxien (Mulder, 1986). Spiralarme sind Stoßwellen, in denen der Prozeß der Sternentstehung vorwiegend stattfindet. Ursachen solcher Stoßfronten können interne Gründe sein wie das asymmetrische Gravitationspotential des Galaxiekerns (z.B. einer Balkengalaxie) oder auch externe Gründe wie Gezeitenkräfte einer Begleitgalaxie (ein beeindruckendes Beispiel ist die Galaxie M51 im Sternbild der Jagdhunde).

Eine wesentliche Rolle spielt bei diesen Modellen der Korotationspunkt, an dem die Störung die gleiche Umdrehungsrate besitzt wie die Keplerströmung. Wegen der Erhaltung der Drehimpulsdichte muß die Energie von Wellen bei Annäherung

an die korotierende Schicht abnehmen und bei Entfernen vom Korotationspunkt anwachsen. Dies ermöglicht bei überkritisch ($v > v_{Kep}$) rotierenden Störungen am Innenrand bzw. bei unterkritisch ($v < v_{Kep}$) rotierenden am Außenrand das Einsetzen nicht-linearer Effekte, ein Aufsteilen von Wellen und die Bildung von Stoßfronten. Im stationären Zustand ergibt sich ein Gleichgewicht zwischen dem Anwachsen der Wellenenergie aufgrund der Erhaltung der Drehimpulsdichte und der Dissipation in Stoßfronten. Die Stärke der Stoßwellen in diesem Sättigungszustand erlaubt Rückschlüsse auf die resultierenden α -Werte derartiger Modelle.

Die Simulationsrechnungen haben gezeigt, daß nicht-axialsymmetrische Störungen spiralförmige Wellen erzeugen. Entfernen sich diese Wellen vom Korotationspunkt, so lassen sie ein Aufsteilen erkennen und bilden Stoßwellen. Da bei den bisherigen Rechnungen noch kein Sättigungszustand erreicht wurde, müssen die maximal erzielten Viskositäten von

$$\alpha \sim 4.2 \cdot 10^{-2}$$

als obere Grenze bei derartigen Modellen aufgefaßt werden, aber kommen damit immerhin in den Bereich der von den Beobachtungen abgeleiteten α -Werte.

In Zusammenfassung läßt sich sagen, daß das Problem der Reibungsprozesse in dünnen Akkretionsscheiben durch die in dieser Arbeit untersuchten hydrodynamischen Modelle noch nicht als vollständig gelöst betrachtet werden kann. Weder die numerisch simulierten instabilen Modelle, noch die Dissipation in Stoßwellen kann den Bereich von $0.01 \leq \alpha \leq 1.0$ erklären. Aber zumindest erreichen letztere Modelle den unteren Bereich der α -Werte. Das läßt vermuten, daß Stoßdissipation zwar nicht allein einen Akkretionsvorgang ermöglichen kann, aber sicherlich eine bedeutende Rolle bei Reibungsprozessen in Akkretionsscheiben spielt. Wegen der o.a. Einschränkungen der zwei-dimensionalen Simulationsrechnungen scheiden turbulente Modelle als mögliche Ursache für die hohe Viskosität keinesfalls aus.

Diese Arbeit hat den Einfluß von Magnetfeldern völlig vernachlässigt. Es gilt als ausgesprochen sicher, daß magnetische Effekte den radialen Impulstransport beeinflussen und Reibungsvorgänge mitbestimmen. Weitergehende Untersuchungen über die Viskosität in Akkretionsscheiben sollten diesen Punkt trotz der überaus großen numerischen Schwierigkeiten unbedingt beachten.

7. Literaturverzeichnis

- Abramowitz, M. und Stegun, I.: 1972, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York
- Acheson, D.J.: 1976, J. Fluid Mech. 77, 433
- Bath, G.T. and Pringle, J.E.: 1981, MNRAS 194, 967
- Black, D.C. and Bodenheimer, P.: 1975, Astrophys. J. 199, 619
- Blaes, O.M.: 1985, MNRAS 212, 37p
- Blaes, O.M.: 1985, MNRAS 216, 553
- Blaes, O.M.: 1987 submitted to MNRAS
- Blaes, O.M. and Glatzel, W.: 1986, MNRAS 220, 253
- Blandford, R.D.: 1976, MNRAS 176, 465
- Blandford, R.D. and Znajek R.L.: 1977, MNRAS 179, 433
- Blumen, W.: 1970, J. Fluid Mech. 40, 769
- Blumen, W., Drazin, P.G. und Billings, D.F.: 1977 J. Fluid Mech. 71, 305
- Boyd, J.P.: 1983, J. Atmos. Sci. 40, 2304
- Boyle, C.B.: 1984, Vistas in Astronomy 27, 149
- Burm, H.: 1985, Astron. Astrophys. 143, 389
- Canuto, V.M., Goldman, I. and Hubickyj, O.: 1984, Astrophys. J. 280, L55
- Chandrasekhar, S.: 1961, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford
- Coroniti, F.V.: 1985, in M.R. Kundu and G.D. Holman (eds.) Unstable Current Systems and Plasma Instabilities in Astrophysics, p.453
- Coroniti, F.V.: 1981, Astrophys. J. 244, 587
- Cowley, S.J. and Smith, F.T.: 1985, J. Fluid Mech. 156, 83
- Courant, R. and Friedrichs, K.O.: 1976, Supersonic Flow and Shock Waves, Springer Verlag
- De Freitas Pacheco, J.A. and Steiner J.E.: 1976, Astrophysics and Space Science 39, 487
- Drazin, P.G. und Davey, A.: 1977 J. Fluid Mech. 82, 255
- Drazin, P.G. und Reid, W.H.: 1981, Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press
- Drury, L.O'C.: 1980, MNRAS 193, 337
- Drury, L.O'C.: 1985, MNRAS 217, 821
- Duschl, W.: 1985, Doktorarbeit Universität München
- Duvall, T.L. and Harvey, J.W.: 1984, Nature 310, 19

- Duvall, T.L, Dziembowski, W.A., Goode, P.R., Gough, D.O., Harvey, J.W.
und Leibacher, J.W.: 1984, *Nature* 310, 22
- Eardley, D.M. and Lightman, A.P.: 1975, *Astrophys. J.* 200, 187
- Ellingsen, T., Gjevik, B. and Palm, E.: 1970, *J. Fluid Mech.* 40, 97
- Frank, J., King, A.R. and Raine, D.J.: 1985, *Accretion Power in Astrophysics*,
Cambridge University Press
- Galeev, A.A., Rosner, R. and Vaina, G.S.: 1979, *Astrophys. J.* 229, 318
- George, W.D., Hellums, J.D. and Martin, B.: 1974, *J. Fluid Mech.* 63, 765
- Glatzel, W.: 1987a, *MNRAS* 225, 227
- Glatzel, W.: 1987b, *MNRAS* in press
- Goldreich, P. and Julian, W.H.: 1969, *Astrophys. J.* 157, 869
- Goldreich, P. and Narayan, R.: 1985, *MNRAS* 213, 7p
- Goldreich, P., Goodman, J. and Narayan, R.: 1986, *MNRAS* 221, 339
- Goodman, J., Narayan, R. and Goldreich, P.: 1987, *MNRAS* 225, 695
- Gottlieb, D. and Orszag, S.A.: 1977, *Numerical Analysis of Spectral Methods*,
NSF-CBMS Monograph No. 26, Soc. Ind. App. Math. Philadelphia
- Hawley, J.F.: 1987, *MNRAS* 225, 677
- Hawley, J.F., Smarr, L.L. and Wilson, J.R.: 1984a, *Astrophys. J.* 277, 296
- Hawley, J.F., Smarr, L.L. and Wilson, J.R.: 1984b, *Astrophys. J. Suppl.* 55, 211
- Hedstrom, G.W.: 1979, *J. Comp. Phys.* 30, 222
- Hocking, L.M.: 1978, in P.H. Roberts and A.M. Soward (eds.) *Rotating Fluids*
in Geophysics, p. 437, Academic Press
- Hoshi, R.: 1981, *Supplement of the Progress of Theoretical Physics* 70, 181
- Ichimaru, S.: 1976, *Astrophys. J.* 208, 701
- Ichimaru, S.: 1977, *Astrophys. J.* 214, 840
- Jones, W.L.: 1968, *J. Fluid Mech.* 34, 609
- Joseph, D.D.: 1976, *Stability of Fluid Motion I*,
Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 27, Springer Verlag 1976
- Kato, S.: 1984, *Publ. Astron. Soc. Japan* 36, 55
- Kato, S. and Horiuchi, T.: 1985, *Publ. Astron. Soc. Japan* 37, 399
- Kato, S. and Horiuchi, T.: 1986, *Publ. Astron. Soc. Japan* 38, 313
- Kippenhahn, R. and Thomas, H.-C.: 1982, *Astron. Astrophys.* 114, 77
- Kley, W. and Hensler, G.: 1987, *Astron. Astrophys.* 172, 124
- Landau, L.D. und Lifshitz, E.M.: 1959, *Course of Theoretical Physics*,
Vol. 6, Fluid Dynamics

- Liang, E.P.T.: 1977, *Astrophys. J.* 218, 243
- Lighthill, J.: 1978, *Waves in Fluids*, Cambridge University Press
- Lightman, A.P.: 1974a, *Astrophys. J.* 194, 419
- Lightman, A.P.: 1974b, *Astrophys. J.* 194, 429
- Lightman, A.P., Shapiro, S.L. and Rees, M.: 1978, in R. Giacconi and R. Ruffini (eds.), *Physics and Astrophysics of Neutron Stars and Black Holes*, Proceedings of the Internat. School of Physics "Enrico Fermi", p. 786
- Lin, C.C.: 1955, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press
- Lin, D.N.C., Papaloizou, J. and Faulkner J.: 1985, *MNRAS* 212, 105
- Lin, D.N.C. and Pringle, J.E.: 1987, *MNRAS* 225, 695
- Lindzen, R.S. and Rambaldi, S.: 1986, *J. Fluid Mech.* 165, 355
- Lindzen, R.S. and Barker, J.W.: 1985, *J. Fluid Mech.* 151, 189
- Lindzen, R.S. and Tung, K.K.: 1978, *J. Atmos. Sci.* 35, 1626
- Livio, M. and Shaviv, G.: 1977, *Astron. Astrophys.* 55, 95
- Lovelace, R.V.E.: 1976, *Nature*, 262, 649
- Lynden-Bell, D.: 1969, *Nature* 223, 690
- Lynden-Bell, D. and Pringle, J.E.: 1974, *MNRAS* 168, 603
- Mark, J.W.-K.: 1976, *Astrophys. J.* 205, 363
- Maslowe, D.A.: 1985, in H.L. Swinney and J.P. Gollup (eds.) *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Topics in Applied Physics Vol. 45, p. 181, Springer Verlag
- Maslowe, D.A.: 1986, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 18, 405
- Meyer, F. and Meyer-Hofmeister, E.: 1982, *Astron. Astrophys.* 106, 34
- Meyer, F. and Meyer-Hofmeister, E.: 1983, *Astron. Astrophys.* 128, 420
- Meyer, F. and Meyer-Hofmeister, E.: 1984, *Astron. Astrophys.* 132, 143
- Michel, F.C.: 1984, *Astrophys. J.* 279, 807
- Monin, A.S. und Yaglom, A.M.: 1971, *Statistical Fluid Mechanics*, Vol. 1, MIT Press
- Morfill, G.E. and Hasinger, G.: 1986, *Mitteilungen der Astronomischen Gesellschaft* Nr. 65, Göttingen
- Morfill, G.E., Tscharnuter, W. and Voelk, H.J.: 1985, in D.C. Black and M.S. Matthews (eds.) *Protostars and Planets II*, p. 493
- Mulder, W.A.: 1986, *Astron. Astrophys.* 156, 354
- Mulder, W.A. and Liem, B.T.: 1986, *Astron. Astrophys.* 157, 148
- Narayan, R., Goldreich, P. and Goodman, J.: 1987, *MNRAS*, 228, 1
- Norman, M.L.: 1980, PhD-Thesis L. Livermore Lab. Reprot UCRL 52946

- Norman, M.L. and Winkler, K.-H.: 1986, in K.-H. Winkler and M.L. Norman,
Astrophysical Radiation Hydrodynamics, Dordrecht Reidel, p. 449
- Novicov, I.D. and Thorne, K.I.: 1973, in C. and B.S. DeWitt (eds.) Black Holes,
Les Houches, p. 343
- Oettl, R., Hillebrandt, W. und Müller, E.: 1985, *Astron. Astrophys.* 151, 33
- Orszag, S.A. and Kells, L.C.: 1980, *J. Fluid Mech.* 96, 159
- Paczyński, B.: 1978, *Acta Astronomica* 28, 91
- Papaloizou, J. and Pringle, J.E.: 1977, *MNRAS* 181, 441
- Papaloizou, J. und Pringle, J.E.: 1984, *MNRAS* 208, 721
- Papaloizou, J. und Pringle, J.E.: 1985, *MNRAS* 213, 799
- Papaloizou, J. und Pringle, J.E.: 1987, *MNRAS* 225, 267
- Pedlosky, J.: 1979, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer Verlag
- Petterson, J.A.: 1983, in W.H.G. Lewin und E.P.J. van den Heuvel (eds)
Accretion-driven Stellar X-ray Sources, p. 367, Cambridge University Press
- Pringle, J.E.: 1981, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 19, 137
- Pringle, J.E. and Rees, M.J.: 1972, *Astron. Astrophys.* 21, 1
- Pringle, J.E.: 1984, in R. Pallavicini (ed.) *Frontiers of Astronomy and Astrophysics*
- Pringle, J.E., Verbunt, F. and Wade, R.A.: 1986, *MNRAS* 221, 169
- Pudritz, R.E.: 1981a, *MNRAS* 195, 881
- Pudritz, R.E.: 1981b, *MNRAS* 195, 897
- Pudritz, R.E. and Fahlman, G.G.: 1982, *MNRAS* 198, 689
- Pudritz, R.E.: 1983, in A.M. Soward (ed.) *Stellar and Planetary Magnetism*,
Gordon & Breach, New York, p.223
- Ray, T.P.: 1982, *MNRAS* 198, 617
- Richtmyer, R.D., und Morton, K.W.: 1967, *Difference Methods for*
Initial Value Problems, Wiley, New York
- Robertson, J.A. und Frank, J.: 1986, *MNRAS* 221, 279
- Różyczka, M.: 1985, *Astron. Astrophys.* 143, 59
- Sakimoto, P.J. und Coroniti, F.V.: 1981, *Astophys. J.* 247, 19
- Sawada, K., Matsuda, T., und Hachisu, I.: 1986a, *MNRAS* 219, 75
- Sawada, K., Matsuda, T., und Hachisu, I.: 1986b, *MNRAS* 221, 679
- Sawada, K., Matsuda, T., Inoue, M. und Hachisu, I.: 1987, *MNRAS* 224, 307
- Sedov, L.I.: 1959, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*,
Academic Press
- Shakura, N.I. und Sunyaev, R.A.: 1973, *Astron. Astrophys.* 24, 337

- Shapiro, S.L. and Teukolsky, S.A.: 1983, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, John Wiley 1983
- Shu, F.H.: 1976, in P. Eggleton et al. (eds.), *Structure and Evolution of close Binary Systems*, D.Reidel, Dordrecht, p.253
- Sod, G.A.: 1978, *J. Comp. Phys.* 27, 1
- Spruit, H.C.: 1984, in T.D. Guyenne (ed.) *The Hydrodynamics of the Sun*, (ESA SP-220), European Space Agency, Noordwijk, p.21
- Spruit, H.C.: 1985, private Mitteilung
- Spruit, H.C.: 1987, *Astron. Astrophys.* 184, 173
- Spruit, H.C., Matsuda, T., Inoue, M. und Sawada, K.: 1987, *MNRAS* 229, 517
- Stella, L. und Rosner, R.: 1984, *Astrophys. J.* 277, 312
- Stefanik, R.P., Ulmschneider, P., Hammer, R. und Durrant, C.J.: 1984, *Astron. Astrophys.* 134, 77
- Stewart, J.M.: 1975, *Astron. Astrophys.* 42, 95
- Stewart, J.M.: 1976, *Astron. Astrophys.* 49, 39
- Takahara, F.: 1979, *Progress of Theoretical Physics* 62, 629
- Tayler, R.J.: 1980, *MNRAS* 191, 135
- Tscharnutter, W.M. und Winkler, K.-H.: 1979, *Computer Physics Communications* 18, 171
- Ulmschneider, P., Kalkofen, W., Nowak, T. und Bohn, U.: 1977, *Astron. Astrophys.* 54, 61
- Urpin, V.A.: 1983, *Astrophys. and Space Science* 90, 79
- van Leer, B.: 1977, *J. Comp. Phys.* 23, 276
- Verbunt, F.: 1982, *Space Sci. Rev.* 32, 379
- Vila, S.C.: 1978, *Astrophys. J.* 223, 979
- Vasyliunas, V.M.: 1979, *Space Science Reviews* 24, 609
- Weber, S.V.: 1979, *Astrophys. J.* 229, 327
- Winkler, K.-H., Norman, M.L. und Mihalas, D.: 1984, *J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer* 31, 473
- Zahn, J.-P.: 1983, in A.N. Cox, S. Vauclair and J.-P. Zahn (eds.) *Astrophysical Processes in Upper Main Sequence Stars*, Geneva Observatory, p. 253
- Zahn, J.-P.: 1984, in A. Noéls und M. Gabriel (eds.) *Theoretical Problems in Stellar Stability and Oscillations*, Proceedings of the 25th Liège International Astrophysic. Colloquium, Liège 1984, p. 407
- Zel'dovich, Ya.B. and Raizer, Yu.P.: 1968, *Elements of Gasdynamics and the Classical Theory of Shock Waves*, Academic Press, New York, 1966
- Zurek, W.H. und Benz, W.: 1986, *Astrophys. J.* 308, 123

Danksagung

Prof. Dr. R. Kippenhahn und Dr. H.U. Schmidt danke ich für die Möglichkeit, meine Doktorarbeit am Max-Planck-Institut für Astrophysik schreiben zu können. Mein ganz besonderer Dank gilt Dr. H.C. Spruit, der durch sein Interesse und durch seine ständigen Ratschläge und Hinweise ganz wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat. Herrn Dieter Kössl bin ich für die Überlassung der analytischen Lösung des Sedov- und Riemann-Problems zu Dank verpflichtet. Ich danke allen Mitarbeitern des Max-Planck-Instituts für Astrophysik, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben. Danielle Beaucamp danke ich für das Korrekturlesen. Nicht zuletzt hat mein Aufenthalt am National Solar Observatory in Sunspot, New Mexico, entscheidend zum theoretischen Teil der Doktorarbeit beigetragen. Mein Dank gilt der AURA, Dr. S.L. Keil und dem Staff des Sac Peak.

Lebenslauf von Michael Kaisig

30. 10. 1954	geboren in Herscheid
1960 - 1964	Besuch der Volksschule in Herscheid
1964 - 1973	Besuch des Zeppelin-Gymnasiums in Lüdenscheid mit Abschluß Abitur
1973 - 1975	Wehrdienst
WS75 - SS82	Studium der Physik an der Albert-Ludwigs Universität in Freiburg mit Abschluß Diplom im SS82. Die Diplomarbeit wurde am Kiepenheuer-Institut für Sonnenphysik unter der Betreuung von Prof. Dr. E.H. Schröter und Dr. C.J. Durrant angefertigt. Thema: Asymmetrien photosphärischer Absorptionslinien in ruhigen und aktiven Gebieten der Sonne, Beobachtung und theoretische Modelle
WS82 - SS84	Wissenschaftlicher Angestellter am Kiepenheuer-Institut für Sonnenphysik
seit WS84	Studium der Astronomie mit Abschluß Promotion an der Ludwig-Maximilians Universität München. Anfertigung der Dissertation am Max-Planck- Institut für Astrophysik unter Betreuung von Dr.H.C. Spruit.

